

PAULO CELSO PAMPLONA SILVA JÚNIOR

**ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS METÁLICOS
COM CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS**

**Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação
em Engenharia Civil da Universidade Federal de
Santa Catarina, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.**

**Florianópolis
2000**

**ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS METÁLICOS
COM CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS**

PAULO CELSO PAMPLONA SILVA JÚNIOR

**Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil,
da Universidade Federal de Santa Catarina, referente à obtenção do título de
Mestre em Engenharia Civil.**

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Daniel Domingues Loriggio

**Florianópolis
2000**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em 19/05/2000 pela comissão examinadora



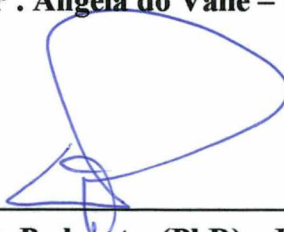
Prof. Dr. Daniel Domingues Loriggio – Orientador – Moderador - UFSC



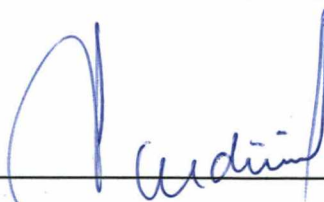
Prof^a. Dr^a. Mildred Ballin Hecke – UFPR



Prof^a. Dr^a. Ângela do Valle – UFSC



Prof. Ivo Padaratz (PhD) – UFSC



Prof. Dr. Jucilei Cordini – Coordenador do CPGEC – UFSC

**À minha Família
pelo constante
apoio e incentivo.**

AGRADECIMENTOS

Ao Prof.^o Daniel Domingues Loriggio, pela dedicação, suporte, incentivo e tranquilidade com que orientou as etapas do desenvolvimento dos trabalhos, até a conclusão desta dissertação.

À Prof.^a Mildred Ballin Hecke, pelo apoio e motivação inicial, que permitiu o ingresso ao curso, sendo responsável direta pelo primeiro e importante degrau a ser percorrido neste projeto.

Aos professores do curso de graduação e pós-graduação do Departamento de Engenharia Civil da UFSC, que auxiliaram direta e/ou indiretamente para o desenvolvimento dos trabalhos.

Aos colegas estagiários do Laboratório de Análises de Estruturas (L.A.E.), que participaram e contribuíram para a realização deste projeto de pesquisa.

À Secretaria de Pós-Graduação de Engenharia Civil da UFSC, pelo constante auxílio ao longo desta “caminhada”.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) que, pelo seu programa de financiamento, possibilita a existência e o desenvolvimento dos cursos de pós-graduação.

Aos amigos e parentes que apoiaram e incentivaram em todos os momentos.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS.....	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	x
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	xiii
RESUMO	xiv
<i>ABSTRACT</i>	xv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 HISTÓRICO	3
1.2 MOTIVAÇÃO E UTILIZAÇÃO.....	9
1.3 ALTERNATIVAS DE ANÁLISE	11
2 COMPORTAMENTO DAS LIGAÇÕES.....	16
2.1 TIPOS DE LIGAÇÃO	16
2.2 RESULTADOS EXPERIMENTAIS	40
3 ANÁLISE NUMÉRICA	57
3.1 MODELO DE PÓRTICO PLANO.....	58
3.2 ELEMENTO COM “MOLAS” NAS EXTREMIDADES	78
3.3 ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA	91
4 MODELAMENTO DE CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS	96
5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	106
6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	139
7 BIBLIOGRAFIA.....	142
8 ANEXOS	146
ANEXO A.....	146
ANEXO B	150

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 - Diferentes métodos de rigidezes lineares, tangente, secante e secante com rotação de 0.010 rad, retirados de Gibbons et al. (1996).....	7
FIGURA 1.2 - Procedimento para obtenção do método de rigidez, C_{k0} , proposto por Bakarat e Chen, retirado de Gibbons et al. (1996).....	7
FIGURA 1.3 – Histórico anual da produção de aço bruto nacional, retirado do Instituto Brasileiro de Siderurgia (IBS) (1999).....	10
FIGURA 1.4 – Curvas da equação momento-rotação para diversos valores de n , retirado de Kishi e Chen (1990).	13
FIGURA 1.5 - Utilização de um diagrama momento-rotação simplificado elasto-plástico para simular o comportamento real da conexão	14
FIGURA 2.1 - Gráfico tensão-deformação do aço estrutural.	18
FIGURA 2.2 - Gráfico tensão-deformação projetado elasto-plástico ideal do aço.	20
FIGURA 2.3 – Típica conexão viga-pilar metálica “single web angle”.....	21
FIGURA 2.4 – Típica conexão viga-pilar metálica “double web angle”.....	22
FIGURA 2.5– Típica conexão viga-pilar metálica “header plate”.	22
FIGURA 2.6 – Típica conexão viga-pilar metálica “top and seat angle”.	22
FIGURA 2.7 – Típica conexão viga-pilar metálica “end plate without stiffeners”.....	23
FIGURA 2.8 – Típica conexão viga-pilar metálica “end plate with stiffeners”.	23
FIGURA 2.9 – Típica conexão viga-pilar metálica “tee-stub”.	23
FIGURA 2.10 – Idealização das ligações rígidas e articuladas num diagrama momento-rotação da ligação viga-pilar.....	27
FIGURA 2.11 – Comportamento não-linear dos sete tipos usuais de ligação viga-pilar.	28
FIGURA 2.12 – Aplicação do método da “beam-line” para se determinar o grau de flexibilidade real da conexão viga-pilar.....	30
FIGURA 2.13 – Viga sujeita a momentos de engastamento M_A e M_B	30
FIGURA 2.14 – Viga sujeita a momentos de engastamento perfeito M_{FA} e M_{FB} para um carregamento genérico.	30
FIGURA 2.15 – Aplicação do método de Analogia de Mohr à viga AB.	31

FIGURA 2.16 – Viga sujeita a momentos de engastamento perfeito M_{FA} e M_{FB}	33
FIGURA 2.17 – Rotação no apoio A de uma viga simplesmente apoiada.	34
FIGURA 2.18 – Viga sujeita a momentos de engastamento M_A e M_B	35
FIGURA 2.19 – Diagrama $M-\theta$ ilustrando a equação da viga-linha e também o comportamento das curvas momento-rotação das conexões dos tipos 1, 2 e 3 de acordo com Salmon (op.cit)	35
FIGURA 2.20 – Diagrama momento-rotação da viga, a), e conexão, b), representando as suas respectivas rigidezes, C e C_c	36
FIGURA 2.21 – Diagrama adimensional de classificação da conexão proposto por Bjorhovde (1990).	38
FIGURA 2.22 – Testes com arranjos cruciforme e cantilever, retirado de Kirby et al (1996).	41
FIGURA 2.23 – Componentes de distorção, retirado de Kirby et al (1996).....	42
FIGURA 2.24 – Deformação padrão geral de uma conexão “single web angle” com sua respectiva configuração da ligação viga-coluna, retirado de Kirby et al (1990).	44
FIGURA 2.25 – Comparação das curvas $M-\theta$ para a ligação “Single Web-Angle”, retirado de Kirby et al (1990).....	44
FIGURA 2.26 – Comparação das curvas $M-\theta$ para a conexão “Double Web-Angle”, retirado de Kirby et al. (1990).....	45
FIGURA 2.27 – Configuração de deflexão de uma ligação típica “Top and Seat Angles” para a condição elástica e um modelo de viga cantilever para o estado último, retirado de Kirby et al.(1990).	46
FIGURA 2.28 – Mecanismo do estado limite último para a conexão “Top Angle”, retirado de Kirby et al.(1990).....	46
FIGURA 2.29 – Comparação das curvas $M-\theta$ para a conexão “Top-and Seat-Angle”, retirado de Kirby et al. (1990).	47
FIGURA 2.30 – Configuração de deformação das cantoneiras conectadas na viga e coluna no regime elástico e a configuração deformada do modelo de cantilever para a conexão “Web Angle”, retirado de Kirby et al.(1990).	48
FIGURA 2.31 – Comparação das curvas $M-\theta$ para a conexão “Top-and Seat-Angle with Double Web-Angle”, retirado de Kirby et al. (1990).	48

FIGURA 2.32 – Tipos das conexões flexíveis viga-pilar pela rigidez da conexão, retirado de Ackroyd et al. (1981).....	50
FIGURA 2.33 - Relação da resistência versus rigidez das conexões viga-coluna retirado de Ackroyd et al. (1981).	51
FIGURA 2.34 – Característica do tipo de arranjo viga-pilar testado.....	53
FIGURA 2.35 – Avaliação da carga-deflexão da conexão retirado de Tan et al. (1996).	54
FIGURA 2.36 – Diagrama de Batho, Beam-line, onde M_c é o valor desconhecido retirado de Estrin (1991).	55
FIGURA 3.1 - Reação não-linear da relação momento-rotação da conexão.	57
FIGURA 3.2 – Mola elástica inextensível, engastada à esquerda e solicitada por uma força axial.....	59
FIGURA 3.3 – Convenção dos sinais positivos para os graus de liberdade.	62
FIGURA 3.4 – Identificação dos graus de liberdade de um elemento de pórtico plano.....	63
FIGURA 3.5 – Aplicação de um deslocamento unitário na direção axial, 1 e 4, e todos os outros deslocamentos nulos.....	63
FIGURA 3.6 – Barra comprimida axialmente.	64
FIGURA 3.7 – Aplicação de um deslocamento unitário na direção 2 e 5, e todos os outros deslocamentos nulos.	64
FIGURA 3.8 – Aplicação de um deslocamento unitário vertical na extremidade A da barra.	65
FIGURA 3.9 – Isostática Fundamental	65
FIGURA 3.10 – Resolução da viga por analogia de Mohr.....	66
FIGURA 3.11 – Aplicação de um deslocamento unitário na direção 3 e 6, e todos os outros deslocamentos nulos.	67
FIGURA 3.12 – Aplicação de uma rotação unitária na extremidade A da barra.....	68
FIGURA 3.13 – Esforços encontrados devido a uma rotação unitária.	68
FIGURA 3.14 – Momentos atuantes nas extremidades livre e engastada de uma barra. ...	69
FIGURA 3.15 – Elemento fixo na extremidade esquerda e articulado na extremidade oposta.	70

FIGURA 3.16 – Elemento com extremidades articuladas	70
FIGURA 3.17 – Incidência de uma barra genérica k com seus respectivos graus de liberdade na numeração global da estrutura.....	72
FIGURA 3.18 – Identificação dos sistemas local e global de referência.....	73
FIGURA 3.19 – Identificação dos graus de liberdade do elemento para cada sistema de eixo de referência.	73
FIGURA 3.20 – Identificação dos seis esforços solicitantes para uma barra genérica k	75
FIGURA 3.21 – Viga bi-engastada com carregamento uniformemente distribuído, carga concentrada no meio do vão e identificação dos G.L. da barra no sentido positivo.	76
FIGURA 3.22 – Nó genérico i formado a partir de duas barras m e n	77
FIGURA 3.23 – Superposição dos efeitos para a composição do elemento de viga bi-apoiada com “molas” nas extremidades.	80
FIGURA 3.24 – Identificação dos graus de liberdade do elemento de viga com “molas” nas extremidades.	80
FIGURA 3.25 – Identificação dos graus de liberdade de uma viga bi-apoiada.	81
FIGURA 3.26 - Diagrama de momentos fletores para um carregamento virtual $\bar{M} = 1$ referentes à rotação das extremidades da viga.	81
FIGURA 3.27 – Elemento de viga com “molas” nas extremidades.	82
FIGURA 3.28 – Identificação dos seis graus de liberdade de um elemento de pórtico plano.	85
FIGURA 3.29 – Exemplo de uma viga bi-engastada e identificação dos graus de liberdade com sentido positivos.....	89
FIGURA 3.30 – Aproximação linear precisa para pequenos níveis de momento.	91
FIGURA 3.31 – Deformada de uma viga apoiada com carregamento uniformemente distribuído	91
FIGURA 3.32 – Ilustração da superestimação do momento semi-rígido utilizando uma rigidez secante linear inicial para uma rotação dada.....	92
FIGURA 3.33 – Relação momento fletor versus rotação elasto-plástico perfeito.....	93
FIGURA 3.34 – Relação momento fletor versus rotação elasto-plástico perfeito.....	93

FIGURA 3.35 – Aplicação do método iterativo secante num diagrama momento-rotação da ligação.	94
FIGURA 4.1.– Identificação dos elementos básicos de uma ligação viga-pilar, retirado de Kirby et al (1996).	97
FIGURA 4.2 – Classificação e convenção dos três grupos de ligação viga-pilar.	98
FIGURA 4.3 – Modelagem para “molas” aplicadas na viga e pilar de um pórtico plano.	99
FIGURA 4.4 – Modelagem para “mola” aplicada somente na viga de um pórtico plano.	99
FIGURA 4.5 – Tipos de arranjos das ligações entre viga e pilar, retirado de Kirby et al (1996).	100
FIGURA 4.6 – Ligação viga-pilar concentrada no eixo forte.	101
FIGURA 4.7 – Ligação viga-pilar concentrada no eixo fraco.	101
FIGURA 4.8 – Ligação viga-pilar tridimensional	102
FIGURA 4.9 – Modelo da conexão semi-rígida para viga orientada na mesa do pilar, segundo Kirby et al (1996), e modelamento com elemento rígido.	102
FIGURA 4.10 – Modelo da conexão semi-rígida para viga orientada na alma do pilar, segundo Kirby et al (1996), e seu modelamento.	103
FIGURA 4.11 – Quatro casos de combinação das conexões rígidas e semi-rígidas, retirado de Kirby et al (1996).	104
FIGURA 5.1 – Diferenças das ligações consideradas mais rígidas e mais flexíveis em relação ao coeficiente de rigidez inicial e ao momento de plastificação ..	107
FIGURA 5.2 – Pórtico plano com carregamento nodal e “molas” aplicadas somente na viga.	109
FIGURA 5.3 – Momentos fletores para conexões rígidas.	110
FIGURA 5.4 – Representação da deformada da estrutura para ligações rígidas, retirada do programa SAP- 2000.	110
FIGURA 5.5 – Momentos fletores para conexões articuladas.	111
FIGURA 5.6 – Representação da deformada da estrutura para ligações articuladas, retirada do programa SAP- 2000.	111
FIGURA 5.7 – Momentos fletores para conexões semi-rígidas	112
FIGURA 5.8 – Típica conexão “single web-angle” com um diagrama simplificado elasto-plástico através de momento de plastificação e rigidez inicial.	113

FIGURA 5.9 – Flexibilidade resultante da conexão para o nó 2 no regime plástico.....	115
FIGURA 5.10 – Pórtico plano com carregamento nodal três vezes superior e seções mais rígidas com “molas” aplicadas somente na viga.	115
FIGURA 5.11 – Típica conexão “header plate” com um diagrama simplificado elasto-plástico através de momento de plastificação e rigidez inicial.....	116
FIGURA 5.12 – Típica conexão “header plate” com um diagrama simplificado elasto-plástico através de momento de plastificação e rigidez inicial e final para o nó 2.....	117
FIGURA 5.13 – Típica conexão “double web-angle” com um diagrama simplificado elasto-plástico através de momento de plastificação e rigidez inicial e final	119
FIGURA 5.14 – Típica conexão “top and seat angle” com um diagrama simplificado elasto-plástico através de momento de plastificação e rigidez inicial e final.	120
FIGURA 5.15 – Comparação das análises para a representação do comportamento das conexões num diagrama momento-rotação..	121
FIGURA 5.16 – Pórtico plano com carregamento uniformemente distribuído com conexões semi-rígidas.	121
FIGURA 5.17 – Gráfico mostrando o comportamento da conexão viga-pilar em termos de momento fletor ao variar sua flexibilidade.	123
FIGURA 5.18 - Comportamento da conexão em termos da flecha no meio do vão da viga ao variar o coeficiente adimensional α	123
FIGURA 5.19 – Pórtico plano bi-engastado, com carregamento uniformemente distribuído com “molas” somente no elemento viga.....	124
FIGURA 5.20 – Momentos fletores fornecidos pelo artigo	125
FIGURA 5.21 – Momentos fletores fornecidos pelo programa Visual Basic.	126
FIGURA 5.22 – Componentes de distorção dos elementos e da conexão da estrutura.	126
FIGURA 5.23 – Pórtico plano de três elementos com carregamento uniformemente distribuído.	128
FIGURA 5.24 – Pórtico plano com aplicação das “molas” na viga e pilar.	128
FIGURA 5.25 – Configuração deformada ampliada da conexão viga-pilar para “mola” nos elementos interceptados.	129

FIGURA 5.26 – Pórtico plano com aplicação das “molas” somente na viga.	130
FIGURA 5.27 – Configuração deformada ampliada da conexão viga-pilar para “mola” na viga.	130
FIGURA 5.28 – Pórtico plano de três andares com carregamento lateral e “molas” aplicadas nas vigas.	132
FIGURA 5.29 – Comparação dos deslocamentos nodais para os três modelos de conexão.	133
FIGURA 5.30 – Pórtico plano de três andares com carregamentos distribuídos e concentrados.....	134
FIGURA 5.31 – Comparação dos modelos de conexão em relação aos deslocamentos nodais horizontais da estrutura.....	137

LISTA DE TABELAS

TABELA 1.1 – Custos de uma obra	10
TABELA 2.1 – Constantes Físicas dos Aços Estruturais conforme NBR-8800.	17
TABELA 5.1 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 com ligações rígidas.....	110
TABELA 5.2 - Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura com ligações rígidas.....	110
TABELA 5.3 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 com ligações articuladas.	111
TABELA 5.4- Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura com ligações articuladas	111
TABELA 5.5 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 com ligações semi-rígidas.....	112
TABELA 5.6 - Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura com ligações semi-rígidas.....	112
TABELA 5.7 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 para os dois tipos de análises:.....	116
TABELA 5.8 - Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura para os dois tipos de análises.....	116
TABELA 5.9 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 para $\alpha = 1,0$	118
TABELA 5.10 - Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura para $\alpha = 1,0$	118
TABELA 5.11 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 para $\alpha = 0,1$	119
TABELA 5.12 - Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura para $\alpha = 0,1$	120
TABELA 5.13 – Momento e flecha na estrutura em termos do coeficiente adimensional da viga, α_v	122
TABELA 5.14 – Momentos fletores na estrutura nos três modelos de conexão.	125
TABELA 5.15 – Deslocamentos nodais horizontais para os três modelos de conexões.....	132
TABELA 5.16 - 1ª análise do pórtico com ligações rígidas.	135
TABELA 5.17 - 2ª análise do pórtico plano com ligação semi-rígidas para α constante em todas as barras e somente para as vigas da estrutura.	135
TABELA 5.18 – Momento de Plastificação das seções transversais.	136

TABELA 5.19 – Critério adotado para os momentos de plastificação das conexões.....	137
TABELA 5.20 - Comparação dos deslocamentos horizontais utilizando os três tipos de ligações viga-pilar.	137

LISTA DE SÍMBOLOS

k	- coeficiente de rigidez à flexão da ligação viga-pilar, kN.m/rad
α	- coeficiente de flexibilidade elástica da ligação, adimensional
f_y	- tensão de escoamento, kN/m ²
f_u	- tensão de ruptura, kN/m ²
ρ	- massa específica, kg/m ³
E	- módulo de elasticidade / módulo de Young, MPa
ν	- coeficiente de Poisson
G	- módulo de elasticidade transversal, MPa
M	- momento fletor atuante no plano da estrutura, kN.m
θ	- deformação rotacional atuante no plano da estrutura, rad
M_u	- capacidade do momento último, kN.m
M_p	- momento de plastificação, kN.m
I_z	- momento de inércia no plano da seção transversal, m ⁴
σ	- tensão de escoamento do aço, kN/m ²
ε	- deformação do aço, m/m
L	- comprimento do elemento, m
A	- área da seção transversal, m ²
$\{\partial\}_L$	- vetor dos deslocamentos nodais da estrutura restringida
$[k]_{LL}$	- matriz de rigidez da estrutura restringida
$[k]^{-1}_{LL}$	- matriz inversa da matriz de rigidez da estrutura restringida
$[r]$	- matriz de rigidez do elemento no sistema local
$[r]$	- matriz de rigidez do elemento no sistema global

$\{\underline{d}\}$	- vetor dos deslocamentos nodais do elemento no sistema local
$\{d\}$	- vetor dos deslocamentos nodais do elemento no sistema global
$\{\underline{S}\}$	- vetor dos esforços nodais do elemento no sistema local
$\{S\}$	- vetor dos esforços nodais do elemento no sistema global
$\{F\}_L$	- vetor dos esforços nodais da estrutura restringida
$[T]$	- matriz de transformação dos eixos de referência
$[T]^T$	- matriz de transformação transposta
$\{\underline{S}_0\}$	- vetor dos esforços de imobilização do elemento (engastamento perfeito) dos nós no sistema local
$-\{\underline{S}_0\}$	- vetor dos esforços equivalentes do elemento no sistema local
$\{F_0\}$	- vetor dos esforços de engastamento perfeito da estrutura não-restringida
$\{F_0\}_L$	- vetor dos esforços de engastamento perfeito da estrutura restringida
$[F_{SR}]$	- matriz de flexibilidade semi-rígida do elemento no sistema local
$[I_{SR}]$	- matriz de rigidez do elemento no sistema local para ligações semi-rígidas
s	- fator constante
$[M]$	- matriz de modificação
$\{\underline{S}_{0SR}\}$	- vetor dos esforços de engastamento perfeito semi-rígidos do elemento no sistema local
$\{S_{0SR}\}$	- vetor dos esforços de engastamento perfeito semi-rígidos do elemento no sistema global
$\{F_{0SR}\}$	- vetor dos esforços de engastamento perfeito para a estrutura não-restringida com ligações semi-rígidas
$\{F_{0SR}\}_L$	- vetor dos esforços de engastamento perfeito no sistema global para a estrutura restringida com ligações semi-rígidas
$[I_{SR}]$	- matriz de rigidez do elemento com ligações semi-rígidas no sistema local
$[r_{SR}]$	- matriz de rigidez do elemento com ligações semi-rígidas no sistema global
$[k_{SR}]_{LL}$	- matriz de rigidez da estrutura restringida com ligações semi-rígidas

-
- $\{ \partial_{SR} \}_L$ - vetor dos deslocamentos nodais da estrutura restringida com ligações semi-rígidas
- $\{ d_{SR} \}$ - deslocamentos nodais do elemento no sistema global
- $\{ S_{SR} \}$ - vetor dos esforços semi-rígidos no sistema global do elemento
- $\{ \underline{S}_{SR} \}$ - vetor dos esforços semi-rígidos no sistema local do elemento

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AISC	- “American Institute of Steel Construction”
EC 3	- “Eurocode 3”
NBR – 8800	- Norma Brasileira de Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios.
IBS	- Instituto Brasileiro de Siderurgia.
PR	- “Partially Restraint”
FR	- “Fully Restraint”
LRFD	- “Load and Resistance Factor Design”
LVDT’s	- “Linear Variable Displacement Transducers”
M.E.F.	- Método dos Elementos Finitos
G.L.	- Grau de Liberdade
V.B.	- “Visual Basic”
E.L.S.	- Estado Limite de Serviço
E.L.U.	- Estado Limite Último

RESUMO

SILVA, P. C. P. Jr. *Análise não-linear de pórticos planos metálicos com conexões semi-rígidas*

Florianópolis, 2000, número de páginas: 164 pp. , - UFSC, Santa Catarina

O presente trabalho apresenta os procedimentos para a análise numérica do comportamento de pórticos planos com conexões metálicas semi-rígidas entre vigas e pilares de estruturas de aço.

Apesar de, tradicionalmente, o cálculo de estruturas metálicas ser realizado imaginando ligações rígidas ou articuladas, constata-se através de ensaios experimentais que a maioria das ligações das estruturas se enquadra em outro tipo de classificação, denominada *semi-rígida*, onde as conexões apresentam resistência ao giro relativo das peças conectadas, mas não possuem rigidez suficiente para impedir todo o deslocamento entre elas. Verifica-se, também, que a rigidez das ligações tem uma grande influência na distribuição das forças internas, nas deflexões e na estabilidade global da estrutura.

Primeiramente são apresentados os tipos usuais de arranjos destas conexões e sua classificação de acordo com seu comportamento à flexão, fornecendo dados importantes para projeto.

Estas conexões são modeladas através de uma formulação matricial pelo Método dos Deslocamentos, considerando a flexibilidade da ligação por meio de “molas” nas extremidades dos elementos de barras.

Foram implementadas rotinas que permitem a consideração de uma relação não-linear entre o momento fletor e a rotação das ligações, permitindo uma melhor aproximação do modelo com os resultados experimentais.

Palavras-chave: análise numérica, conexões viga-pilar semi-rígidas, estruturas metálicas, método dos deslocamentos, análise elasto-plástica.

ABSTRACT

SILVA, P. C. P. Jr. *Analysis non-linear of multi-story portal plane frames with semi-rigid connections of steel structures.*

Florianópolis, 2000, número de páginas: 164 pp. , - UFSC, Santa Catarina

The present work presents the necessary procedures for the numeric analysis of the behavior of frames with semi-rigid steel connections.

Often, the analysis of such structures is performed assuming either rigid, fully restrained connections or unrestrained, pinned connections. Most of the structures connections, however, although having some rotacional restraint, does not have enough stiffness to completely unable the relative rotation of the elements. These type of connections are called semi-rigid connections. The stiffness of the connections also plays an important role on the distribution of internal forces, on the deflection, and on the global stability of the structures.

The common arrangements of semi-rigid connections and their classification with respect to their flexural behavior are initially presented, providing important data for structural projects.

These connections are modeled through the Stiffness Method in wich springs are added to the bar extremities to include connection flexibility.

Programing routines were implemented to enable the consideration of a non-linear relationship between flexural moment and the relative angle change of such connections. These routines allow for a better approximation of the model presented here and experimental results.

Keywords: numeric analysis, semi-rigid steel connections, framed structures, stiffness method, non-linear analisys.

1 - INTRODUÇÃO

O presente trabalho pretende apresentar, de forma sucinta e objetiva, uma análise numérica do comportamento de pórticos planos com conexões metálicas semi-rígidas entre vigas e pilares de estruturas metálicas.

Primeiramente os tipos de arranjos destas peças conectadas são classificados de acordo com seu comportamento à flexão. O cálculo de suas estruturas tem sido tradicionalmente realizado através de duas concepções: ligações rígidas e rotuladas. Porém, constata-se através de ensaios experimentais (característica do diagrama típico do momento fletor versus rotação), que várias destas estruturas se enquadram em outro tipo de ligação, denominada *semi-rígida*, onde as conexões apresentam uma certa flexibilidade.

Vários métodos têm sido desenvolvidos para incorporar o comportamento real das conexões na análise e projeto de estruturas. Desde a década de 30, métodos convencionais de análise de pórticos vêm sendo modificados utilizando-se uma relação momento-rotação elástica-linear para a modelagem da conexão. Entretanto, somente a partir de 1980 as pesquisas sobre o comportamento não-linear de pórticos com conexões semi-rígidas começaram a ser desenvolvidas. Estes estudos incluem os efeitos da não-linearidade geométrica e do material, utilizando diferentes métodos, em sua maioria incrementais iterativos, de análise de resistência e de estabilidade de pórticos planos ou espaciais.

Análises convencionais e cálculos das estruturas metálicas ainda utilizam um comportamento simplificado das conexões viga-coluna baseados em dois casos extremos: ligações rígidas e rotuladas. Todavia, a adoção dessa idealização do comportamento da ligação simplifica profundamente a análise e cálculo do processo, podendo trazer resultados insatisfatórios. Isso porque a maioria das conexões usadas nas estruturas metálicas reais exibe um comportamento de deformação intermediário aos casos extremos citados, podendo contribuir substancialmente para todos os deslocamentos da estrutura.

Os deslocamentos apresentados por uma estrutura estão relacionados à sua rigidez e, como as conexões compõem parte de uma estrutura, uma alteração de sua rigidez influenciará significativamente:

- ✓ na distribuição das forças internas dos membros da estrutura;
- ✓ nas deflexões;
- ✓ na estabilidade limite das cargas e, por consequência, na estabilidade global da estrutura.

A utilização da ligação semi-rígida resulta, portanto, em uma análise mais precisa e adequada do comportamento real da estrutura.

É conveniente ressaltar, em termos do efeito da flexibilidade da conexão, que a Norma Brasileira de Estruturas Metálicas, NBR-8800 (1986) classifica a ligação somente em dois casos extremos: ligação rígida e articulada. Um dos principais motivos para não inclusão do efeito da flexibilidade da conexão deve-se à dificuldade em se determinar o seu grau de restrição. Já algumas instituições internacionais, como o “American Institute of Steel Construction” (AISC) (1978) e o “Eurocode” 3 (EC 3) (1993) apud Goto (1998), apresentam publicações onde o fenômeno da ligação semi-rígida é incluído. Porém, de acordo com o histórico atual apresentado, existem diversos artigos publicados e em desenvolvimento, atestando o interesse dos pesquisadores científicos no assunto.

Essas conexões serão modeladas através de uma formulação matricial linear e não-linear pelo Método da Rigidez, considerando a flexibilidade da ligação através de molas nas extremidades dos elementos de barras. Deve-se salientar que os procedimentos foram implementados em um programa de pórtico plano na linguagem Visual Basic.

Serão apresentados vários exemplos aplicativos, utilizando os modelos de molas nas extremidades que serão comparados com resultados experimentais e teóricos obtidos de uma bibliografia pertinente ao assunto.

Portanto, o objetivo geral do estudo é implementar computacionalmente um modelo que simule o comportamento linear e não-linear de ligações metálicas semi-rígidas e que tenha aplicação prática em projeto.

Realizou-se um levantamento de tipos, características e comportamento de ligações para dar subsídio a projetos. A seguir são apresentadas algumas *simplificações de cálculo* da análise desenvolvida.

Para a inclusão do efeito da flexibilidade em estruturas metálicas é necessária uma modelagem da conexão que reflita o seu comportamento real. Essa influência é muito complexa devida a vários fatores que compõem a conexão, por exemplo, as rotações no plano, fora do plano e torsional, os deslocamentos de translação isolados

e/ou combinados com a rotação no plano, e os aspectos externos como a geometria da conexão, a dos membros, a disposição dos membros de viga e pilar, quantidade de parafusos, área de contato dos membros, fricção, entre outros.

Segundo Kirby et al (1996), testes de juntas flexíveis das conexões ligadas pela flange têm indicado que a rigidez torsional da junta é relativamente muito elevada para o membro conectado e que sua contribuição para a deformação torsional do elemento pode ser negligenciada. Já para estudos tridimensionais do comportamento das estruturas, a rigidez fora do plano pode ser significativa na abordagem dos seus respectivos deslocamentos. Por se tratar da resolução de estruturas no plano, somente serão consideradas as rotações correspondentes ao plano da mesma.

Conforme testes e ensaios em laboratório, as solicitações do esforço normal, esforço cortante, momento fletor e seus efeitos combinados também afetam o comportamento das ligações. Contudo, o comportamento real da conexão, levando em conta todos esses efeitos, é de difícil obtenção e não altera significativamente o comportamento das estruturas em relação às deformações para rotação no plano.

Assim sendo, o presente trabalho tem por proposta apresentar uma análise da modelagem da conexão para projetos, baseada somente na rigidez rotacional no plano, estabelecendo procedimentos de cálculos que sejam simples, precisos e práticos.

Não serão parte do referido estudo os efeitos de não-linearidade geométrica causados por grandes deslocamentos da estrutura. A preocupação existe e é relevante, uma vez que processos de determinação dos efeitos de segunda ordem, como P-delta, matriz geométrica e outros podem ser aplicados.

Deseja-se, portanto, apresentar um método sistemático que seja facilmente aplicável às estruturas metálicas encontradas na prática para otimizar seu cálculo, considerando o comportamento das conexões como semi-rígidas.

1.1 - HISTÓRICO

Um histórico do problema é apresentado por Li et al. (1995) que descrevem, com bastante procedência, os primeiros estudos relacionados às ligações semi-rígidas, tendo um importante valor histórico.

O início dos estudos das características semi-rígidas para ligações viga-coluna e os seus efeitos no comportamento da estrutura podem ser reportado aos anos 30. Desde

então, uma grande quantidade de trabalho experimental e teórico têm sido desenvolvidos no comportamento das ligações e dos seus efeitos no conjunto de estruturas completas. Batho e Rowan propuseram o método da viga-linha em 1931; este é um método gráfico para prever a restrição final para conexões em que a curva $M - \theta$ (momento-rotação) é obtida experimentalmente. Na década de 30, Baker e Rathbun foram os primeiros a aplicar os métodos convencionais da inclinação da deformada e da distribuição do momento na análise de estruturas semi-rígidas. Em seguida, Johnston e Mount, Stewart, Young e Jackson, Baker e Williams e Sourochnikoff, e diversos autores, também contribuíram com a utilização destes métodos convencionais. Uma revisão detalhada do rápido desenvolvimento na análise de estruturas semi-rígidas foi realizada por Jones.

Na década de 60, foi estabelecido o método da matriz de rigidez na análise estrutural utilizando-se computadores. Monforton e Wu foram os primeiros a incorporar os efeitos das conexões semi-rígidas no método da matriz de rigidez em 1963. Isso foi realizado pela modificação das matrizes de rigidez da viga para levar em consideração os efeitos das ligações semi-rígidas na análise da estrutura. Procedimentos similares também foram propostos por Livesley e Gere e Weaver praticamente na mesma época. Nestes métodos de análise, uma relação linear $M - \theta$ (momento-curvatura) era admitida e foi utilizado o fator linear de conexão semi-rígida $Z = \theta/M$, usado para modificar as matrizes de rigidez da viga.

O comportamento dinâmico de estruturas semi-rígidas foi investigado por Lionberger e Weaver em 1969 e por Suko e Adams, em 1971. Nestas análises, o comportamento elasto-plástico da ligação foi modelado por molas equivalentes. Em 1970, Romstad e Subramanian abordaram o problema da estabilidade da estrutura com nós semi-rígidos. Mais investigações a respeito da análise semi-rígida na estrutura incluindo o cortante e deformação axial das ligações foram conduzidos por Lightfoot e Le Messurier em 1974. Desde então, várias abordagens e aperfeiçoamentos para análise de estruturas semi-rígidas têm sido desenvolvidos na adoção da técnica da matriz de rigidez.

A partir da década de 80, os estudos e pesquisas do comportamento das conexões semi-rígidas partiram para um enfoque da não-linearidade do diagrama momento-rotação da junção viga-pilar. Moncarz et al. (1981) iniciaram os estudos do comportamento real da conexão apresentando um método de análise matricial pelo

método dos deslocamentos aplicado a um elemento com “molas” nas extremidades. A implementação computacional foi feita de forma incremental das cargas. Já no ano subsequente, Ackroyd et al (1982) apresentaram, através de estudos experimentais de vários tipos de conexões metálicas, valores das rigidezes à rotação da conexão.

Vários modelos analíticos foram criados com o intuito de representar adequadamente o comportamento não linear do momento-rotação das ligações viga-pilar. Como precursores, Kishi et al. (1990), entre os maiores colaboradores do desenvolvimento destas pesquisas, apresentaram um modelo com três parâmetros: rigidez inicial da conexão R_{ki} , capacidade de momento último M_u e parâmetros de forma n . Esse modelo prediz a relação momento-rotação de conexões semi-rígidas de viga-pilar metálica, facilmente aplicável à análise de 2ª ordem. Será apresentado mais detalhadamente na seção Alternativas de Análise, nesse capítulo.

No mesmo ano, Bjorhovde et al (1990), apresentaram um esquema de classificação das conexões viga-pilar em termos de resistência, rigidez e ductilidade, usando testes experimentais e teóricos.

Em seguida são apresentados, resumidamente, estudos de modelos para prever o comportamento não-linear das conexões viga-pilar utilizando diversas análises:

- Blandford (1987) apresenta uma aproximação exponencial, utilizando equações de rigidez elásticas e flexibilidade dos elementos conectados através de “molas” nas suas extremidades. É aplicado um algoritmo para solucionar problemas de não-linearidade da ligação e geométrica pelo método da rigidez elástica tangente.
- Estrin (1992), realiza um estudo que aprimora o conceito da “beam-line” de Batho, apresentado no capítulo dois do presente trabalho.
- Toader (1993), apresenta funções estáveis para elementos com conexões semi-rígidas através de “molas” localizadas nas suas extremidades que compõem a matriz de rigidez equivalente, para uma análise não-linear de segunda ordem de estruturas espaciais.
- Xu et al. (1993) utiliza uma análise matricial pelo método da rigidez aplicado ao elemento plano com “molas” nas extremidades para simular a flexibilidade da conexão. O processo de cálculo consiste em considerar as conexões e membros da estrutura representados pelas suas rigidezes e dimensões, respectivamente, como variáveis contínuas e discretas. O método é implementado computacionalmente através de um algoritmo que ao ser aplicado à estrutura, minimiza o “custo” das conexões e membros. O citado método apresenta um cálculo otimizado de estruturas metálicas, considerando

o comportamento das conexões semi-rígidas. Este tipo de implementação, realizado através de um algoritmo foi desenvolvido também por Simões (1996).

Li et al. (1995) formulam uma nova interpretação da implementação da flexibilidade nos membros de uma estrutura, considerando a conexão como um elemento independente. Os citados autores apresentam um cálculo simplificado onde somente a rigidez à flexão da conexão é considerada. No artigo, este tipo de elemento de conexão independente é aplicado aos métodos da distribuição do momento, da inclinação da deformada e da matriz de rigidez.

A formulação de Elementos Finitos foi introduzida por El-Sayed (1989) e aprimorada por Cameron et al. (1997) – otimizando as dimensões dos elementos de viga das estruturas - apresentando um cálculo usando a rigidez da ligação inicial por um elemento finito “shell” (placa) e/ou por dados experimentais. A análise é aplicada a estruturas tridimensionais.

Utilizando os conceitos das conexões rígidas e semi-rígidas, um estudo do comportamento de edifícios altos é proposto por Kishi et al. (1996), para reduzir custos, utilizando o modelo de 3 parâmetros.

Kirby et al. (1996), publicaram uma compilação de artigos intitulado “Ação Semi-Rígida nas Estruturas Metálicas”, onde descrevem:

- a ação semi-rígida idealizada como uma instabilidade;
- a determinação da característica não-linear do momento-rotação por ensaios experimentais;
- desenvolvimento de abordagens analíticas e verificações experimentais;
- comportamento experimental de colunas em 3 dimensões com conexões semi-rígidas;
- cálculo de colunas “non sway”- indeslocáveis conectadas por ligações semi-rígidas;
- cálculo das deflexões no estado de serviço de estruturas indeslocáveis com conexões semi-rígidas, mostrando vários métodos de aproximação para simular a rigidez real da curva momento-rotação da conexão, tais como: rigidez tangente inicial (C_i), rigidez secante inicial (C_M) correspondente ao momento resistente da conexão (M_M), rigidez secante com uma rotação correspondente a 0.010 rad (C_{10}) e, finalmente, uma representação da rigidez linear secante da conexão proposta por Barakat e Chen (C_{kO}) (1990) apud Kirby et al (1996).

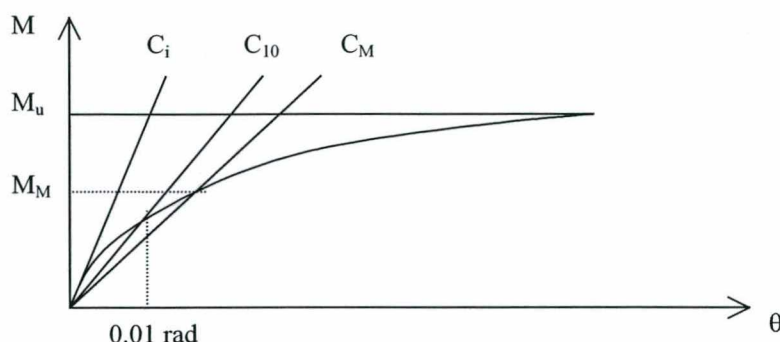


FIGURA 1.1 - Diferentes métodos de rigidezes lineares, tangente, secante e secante com rotação de 0.010 rad, retirados de Gibbons et al. (1996).

O método da rigidez linear secante, C_{k0} , proposto por Bakarar e Chen (1990) apud Gibbons et al. (1996), é obtido pelo ponto de interseção da rigidez tangente inicial, C_i , com a capacidade do momento último da conexão, M_u , correspondendo à rotação da conexão θ_0 . Nessa rotação obtém-se na curva momento-rotação da conexão um segundo ponto que permite o traçado da reta secante C_{k0} .

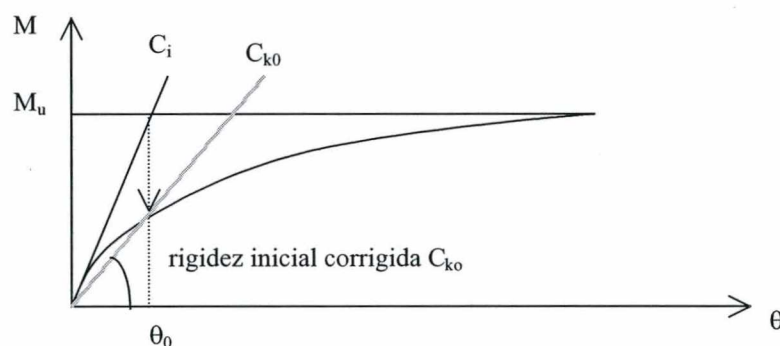


FIGURA 1.2 - Procedimento para obtenção do método de rigidez, C_{k0} , proposto por Bakarar e Chen, retirado de Gibbons et al. (1996).

Essa publicação é concluída com a apresentação de futuros desenvolvimentos em relação à influência da rigidez finita na conexão de estruturas deslocáveis e o desenvolvimento de métodos simples de cálculo.

Recentemente, Goto et al. (1998) apresentaram um novo sistema de classificação proposto em termos dos limites entre as conexões rígidas e semi-rígidas, utilizando o modelo de 3 parâmetros de Kishi e Chen, fazendo comparações com o modelo de Bjorhovde e do EC3. Este sistema de classificação será explicado mais detalhadamente no capítulo dois, referente a resultados experimentais.

Universidade Federal de Minas Gerais e São Carlos, apresentam estudos do comportamento de ligações viga-coluna por chapa simples e ligações parafusadas com chapa de topo, respectivamente. A seguir serão descritos, resumidamente, esses trabalhos citados.

De acordo com a dissertação de Mata (1998), realizou-se uma análise não-linear pelo Método dos Elementos Finitos de ligações por chapa simples usuais no Brasil, levando em conta o seu comportamento semi-rígido. Os parâmetros modificados no estudo da conexão viga-coluna foram: variação de dimensões, do número e diâmetro dos parafusos, tipo e posição dos elementos de apoio. A ligação por chapa simples foi realizada para viga ligada à mesa e à alma do pilar. Utilizou-se uma análise não-linear para o comportamento do aço por uma curva bi-linear de tensão-deformação. Os elementos finitos utilizados na análise, usando o programa ANSYS 5.4, para discretização do modelo foram:

- ✓ SHELL 43, elemento de casca;
- ✓ COMBIN 39, elemento de mola não-linear.

Esse trabalho apresenta, em forma de resultados, curvas momento-rotação e de resistências últimas das ligações viga-coluna por chapa simples, sendo uma útil bibliografia para fornecer subsídios a projetos, na forma de parâmetros necessários para modelar a ligação por chapa simples.

Em relação às ligações parafusadas viga-coluna com chapa de topo, Maggi (2000), utilizou o mesmo programa, ANSYS, e o mesmo diagrama bi-linear para a tensão-deformação do aço. O seu modelo teórico é baseado e comparado com as características de alguns protótipos ensaiados por Ribeiro (1998), cujo trabalho envolveu a análise experimental de ligações viga-coluna com chapa de topo. Algumas metodologias para dimensionamento das ligações viga-coluna e propostas de classificação são discutidas e comentadas no seu estudo. Um fator bastante interessante no seu trabalho refere-se a descontinuidade geométrica na interação dos elementos componentes da ligação, onde são utilizados elementos finitos especiais com os quais é possível simular o contato entre parafusos, porcas, chapa de topo e mesa do pilar. O elemento de contato utilizado no programa ANSYS foi o CONTAC 49, para as seguintes regiões de interação: chapa de topo e a mesa do pilar (compressão) e o deslocamento da chapa de topo com pilar (tração).

Os resultados obtidos são apresentados em forma da rigidez das ligações, verificando-se a influência da variação da espessura da chapa de topo e diâmetro dos

Os resultados obtidos são apresentados em forma da rigidez das ligações, verificando-se a influência da variação da espessura da chapa de topo e diâmetro dos parafusos. A comparação com resultados experimentais e teóricos é satisfatória para o tipo de discretização utilizado para a conexão viga-coluna com chapa de topo.

1.2 - MOTIVAÇÃO E UTILIZAÇÃO

Atualmente, as estruturas de aço são aplicadas em praticamente todos os setores construtivos. Na construção civil, elas representam um papel bastante importante no projeto de estruturas.

Embora no Brasil a utilização de estruturas metálicas nas obras de engenharia seja ainda incipiente, se comparada com as estruturas de concreto armado, esse quadro está se transformando progressivamente devido às inúmeras vantagens apresentadas pelas construções em aço estrutural.

Segundo Bellei (1998), as estruturas compostas de material aço apresentam as seguintes vantagens estruturais:

1. Alta resistência do material nos diversos estados de tensão (tração, compressão, flexão, etc.), o que permite aos elementos estruturais suportarem grandes esforços, apesar da área relativamente pequena das suas seções; por isso, as estruturas de aço, embora sejam de grande densidade (7.850 kg/m^3), são mais leves do que os elementos constituídos de concreto armado;
2. Os elementos de aço oferecem uma grande margem de segurança no trabalho, o que se deve ao fato de o material ser único e homogêneo, com limite de escoamento, ruptura e módulo de elasticidade bem definidos;
3. Os elementos de aço são fabricados em oficinas, de preferência seriados, e sua montagem é bem mecanizada, permitindo com isso diminuir o prazo final da construção;
4. Os elementos de aço podem ser desmontados e substituídos com facilidade, o que permite reforçar ou substituir facilmente diversos elementos da estrutura.
5. Possibilidade de reaproveitamento do material que não seja mais necessário à construção.

Além disso, as companhias siderúrgicas nacionais estão em contínuo desenvolvimento e com uma produção significativa, produção nacional de aço bruto

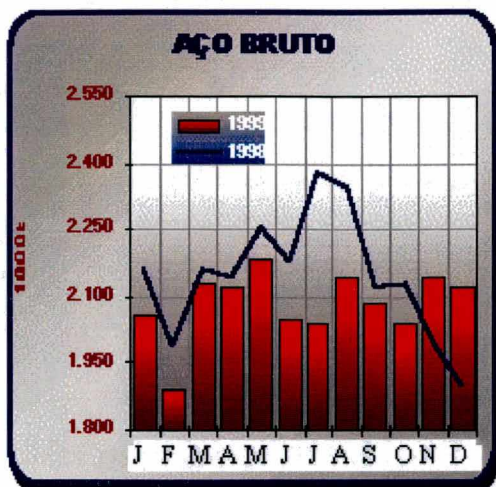


FIGURA 1.3 – Histórico anual da produção de aço bruto nacional, retirado do Instituto Brasileiro de Siderurgia (IBS) (1999).

MÊS	1998	1999
J	2.157	2.057
F	1.991	1.889
M	2.159	2.130
A	2.139	2.122
M	2.259	2.183
J	2.181	2.048
J	2.378	2.038
A	2.349	2.139
S	2.124	2.089
O	2.131	2.037
N	1.995	2.144
D	1.897	2.122

A desvantagem dos elementos de aço carbono é a sua suscetibilidade à corrosão, o que requer que eles sejam cobertos com uma camada de tinta ou seja empregado outro método de proteção. Para minorar esse problema, as usinas nacionais estão fabricando os aços de alta resistência à corrosão atmosférica, tais como: USI-SAC 50 E 41, COS-AR-COR 500 e 400, e Niocor, os quais apresentam uma resistência à corrosão da ordem de duas a quatro vezes a do aço carbono, dispensando qualquer proteção, a não ser em casos especiais (regiões marinhas e industriais agressivas).

Dentre os fatores que influenciam no custo de uma estrutura, a seleção do sistema estrutural é de suma importância no custo total da obra. Por se tratar de uma das primeiras fases da realização de uma construção, a modelagem adequada de como a estrutura realmente se comporta irá influenciar significativamente nas outras fases de execução da obra e, conseqüentemente, no custo final da edificação.

Em geral, o custo de uma estrutura metálica pode ser apresentado da seguinte maneira, segundo Bellei (1998):

TABELA 1.1 – Custos de uma obra.

Projeto Estrutural	1%	a	3%
Detalhamento	2%	a	6%
Material e insumos	20%	a	50%
Fabricação	20%	a	40%
Limpeza e pintura	10%	a	25%
Transporte	1%	a	3%
Montagem	20%	a	35%

A tabela dos custos de uma obra evidencia a relação existente do custo-benefício da etapa do projeto estrutural, decorrente do seu baixo custo relativo ao custo total com a relevância e importância que consiste na concepção estrutural de uma obra de engenharia.

Diante do exposto, fica justificado o desenvolvimento de novos estudos de modelos de análise estrutural que venham melhor representar o comportamento real das estruturas metálicas.

1.3 - ALTERNATIVAS DE ANÁLISE

Atualmente, o estudo da utilização de conexões semi-rígidas para estruturas metálicas se apresenta focado em formulações e modelagens bastante complexas.

Várias pesquisas realizadas, e em desenvolvimento por ensaios experimentais ou por estudos analíticos, objetivam simular o comportamento real da conexão semi-rígida.

Inicialmente, a preocupação está voltada para a determinação do gráfico momento fletor versus rotação. Verifica-se experimentalmente um caráter não-linear para o comportamento da ligação semi-rígida para todas as estruturas metálicas.

Dentre os vários modelos matemáticos de aproximação para a determinação da curva momento- rotação da conexão, os mais utilizados são:

- Exponenciais;
- Polinomiais: equações parabólicas, cúbicas , etc;
- Equação da Viga Linha Modificada: caracterizada por basear e refinar o estudo de uma relação linear entre momento fletor e o ângulo de rotação para um caráter não-linear da conexão;
- “Power Model” de Kishi e Chen: trata-se de um modelo com três parâmetros, da rigidez da conexão inicial, da capacidade do momento último, e do parâmetro de forma.

É apresentado a seguir, de forma resumida, o modelo dos três parâmetros, “power model”, desenvolvido por Kishi e Chen (1990), e Kishi e Chen et al (1993).

Os valores de R_{ki} e M_u são determinados por um simples procedimento de cálculo onde o mecanismo de colapso é aplicado à conexão, segundo Kishi e Chen (1990).

O parâmetro de forma n tem como propriedade se ajustar à curva momento-rotação de acordo com resultados experimentais. Pode ser determinado como uma função linear do $\log_{10}\theta_0$ (Kishi e Chen et al 1991), representando uma equação empírica, baseada em resultados experimentais, onde: $\theta_0 = M_u/R_{ki}$

Procedimento de determinação do parâmetro de forma n :

1. O parâmetro de forma n para cada teste experimental é determinado numericamente primeiro pela equação (1.1.1).
2. O parâmetro de forma é considerado ser uma função linear do $\log_{10} \theta_0$. Usando uma técnica estatística para os valores obtidos no ensaio experimental de n , é obtida a equação empírica de n para cada tipo de conexão.

A relação do momento-rotação ($M-\theta_r$) pode ser desta forma representada pelo “power model”, assumindo uma equação momento-rotação elasto plástica perfeita.

$$M = \frac{R_{ki} \cdot \theta_r}{\left[1 + \left(\frac{\theta_r}{\theta_0} \right)^n \right]^{1/n}} \quad (1.1.1)$$

ou

$$m = \frac{\theta}{(1 + \theta^n)^{1/n}} \quad (1.1.2)$$

onde:

$$m = \frac{M}{M_u} \quad (1.1.3)$$

$$\theta = \frac{\theta_r}{\theta_0} \quad (1.1.4)$$

$$\theta_0 = \frac{M_u}{R_{ki}} \quad (1.1.5)$$

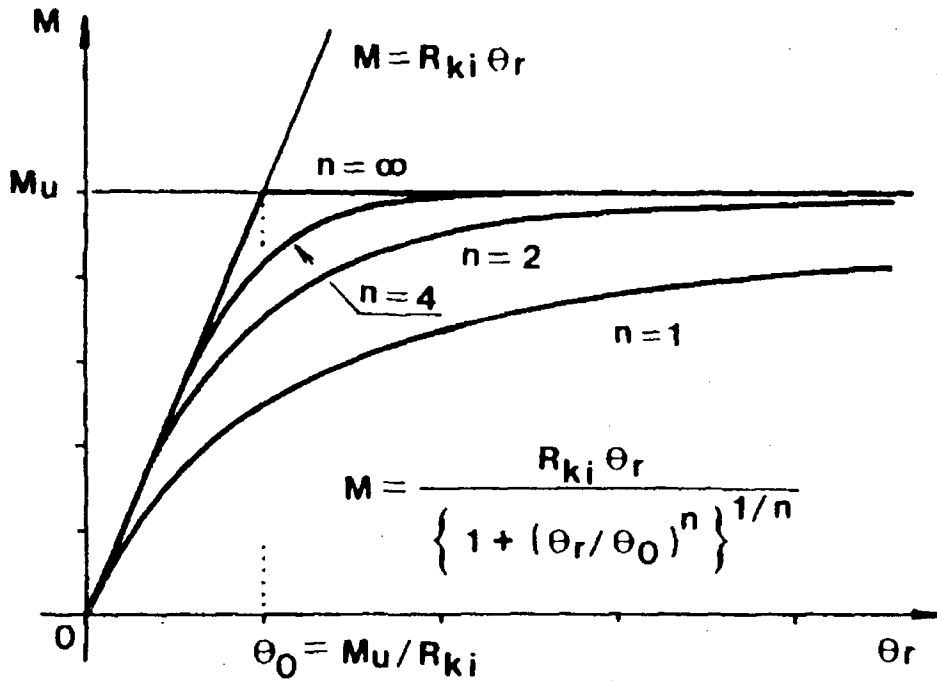


FIGURA 1.4 – Curvas da equação momento-rotação para diversos valores de n , retirado de Kishi e Chen (1990).

Valores representativos do parâmetro de forma n tendem a “achatar” a curva para o patamar da capacidade do momento último. Como ilustração, para um valor de n tendendo ao infinito, o modelo é reduzido a uma curva bi-linear com rigidez inicial da conexão R_{ki} e capacidade do momento último M_u .

A facilidade de implementação computacional do modelo dos três parâmetros deve-se aos seguintes fatores:

- o momento da conexão M pode ser representado como uma função da rotação relativa θ_r .
- a rigidez tangente da conexão R_{ki} pode ser diretamente obtida sem iteração.

O modelo permite determinar rapidamente os valores da rigidez da conexão inicial, R_{ki} , da capacidade do momento último para uma dada conexão, representando adequadamente o comportamento da conexão segundo um gráfico momento-rotação não-linear.

Os modelos matemáticos apresentados têm seus resultados comparados e ajustados aos obtidos por ensaios experimentais.

O diagrama momento fletor versus rotação adotado no trabalho para simular o comportamento da conexão semi-rígida é bi-linear. Os procedimentos adotados nesse

trabalho poderiam ser facilmente adaptados para outros modelos, tais como os descritos anteriormente.

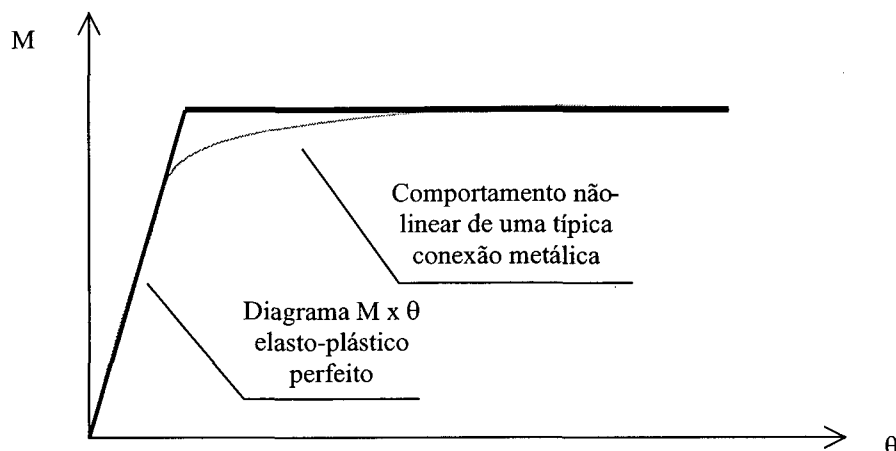


FIGURA 1.5 - Utilização de um diagrama momento-rotação simplificado elasto-plástico para simular o comportamento real da conexão

Em termos de análise global da estrutura, já existem estudos recentes que consideram além da não-linearidade física a não-linearidade geométrica. São efeitos de 2ª ordem devidos a grandes deslocamentos na estrutura, que podem ser solucionados pela utilização de métodos largamente difundidos como o método $P-\Delta$ e o da matriz geométrica K_G . Esses tipos de não-linearidades influenciam os coeficientes da matriz de rigidez dos elementos e conseqüentemente a matriz de rigidez da estrutura.

Com os recursos computacionais disponíveis, estudos recentes estão utilizando o Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) em estruturas tridimensionais. O tipo de elemento finito largamente utilizado é o “shell” (elemento de casca) para o cálculo considerando o efeito da flexibilidade das conexões.

Conforme descrito anteriormente, em termos de pesquisa, existem estudos avançados para esse tipo de análise, porém não são usualmente utilizados na prática, uma vez que os projetos estruturais são, geralmente, baseados em análises elásticas simplificadas.

Para determinação da rigidez da conexão viga-pilar, onde são considerados os vários níveis de solicitação na curva momento-rotação, faz-se necessária a utilização de métodos iterativos, tais como: linear, bi-linear, tri-linear, tangente, secante, modelo simplificado de Bakarat e Chen, dentre outros.

Nesse trabalho serão utilizados elementos de barra tradicionais com a inclusão de molas em suas extremidades para simular o efeito da ligação. A análise não-linear

será implementada através do método iterativo secante. As vantagens dessa metodologia deve-se a:

- ✓ simplicidade do processo apresentado;
- ✓ fácil modelagem;
- ✓ fácil implementação em qualquer linguagem de programação;
- ✓ fácil incorporação em projeto;
- ✓ precisão dos resultados.

Portanto, é proposta uma análise matricial pelo Método da Rigidez utilizando um elemento plano com “molas” em suas extremidades e um método iterativo secante para determinar a rigidez à flexão da conexão para a representação da flexibilidade existente nas ligações viga-pilar de estruturas metálicas.

2 - COMPORTAMENTO DAS LIGAÇÕES

Neste capítulo é feito um estudo das ligações viga-pilar de estruturas metálicas com o objetivo de fornecer subsídios a projetos estruturais.

Inicialmente serão descritas as classificações e propriedades do aço estrutural utilizado, bem como identificação e definição dos elementos constituintes de um diagrama tensão-deformação típico do material.

São apresentadas, em seguida, as características do comportamento das ligações conforme as solicitações a que estão submetidas e vários critérios de classificação dos tipos de ligações viga-pilar de estruturas metálicas semi-rígidas.

O capítulo é concluído, apresentando resultados de ensaios experimentais de ligações viga-pilar metálicas representadas por diagramas momento-rotação.

2.1 - TIPOS DE LIGAÇÃO

Com o objetivo de familiarizar-se com o material a ser estudado, é apresentada inicialmente a classificação dos tipos de aços estruturais, bem como as suas propriedades mecânicas, segundo Bellei (1998).

O aço é um composto que consiste quase totalmente de ferro (98%), com pequenas quantidades de carbono, silício, cobre, enxofre, fósforo, manganês, etc. O carbono é o material que exerce o maior efeito nas propriedades do aço. Suas propriedades são bem definidas, e entre elas, podemos citar: a alta resistência mecânica (comparada com qualquer material disponível) e a ductilidade (capacidade que o aço tem de se deformar antes da ruptura). Os aços estruturais são divididos em dois grupos: aços carbono e aços de baixa liga.

1. Aço-carbono: Os aços-carbono são os tipos mais usuais, nos quais o aumento de resistência em relação ao ferro puro é produzido pelo carbono e, em menor escala, pela adição de manganês. Em estruturas usuais de aço, utilizam-se aços com teor de carbono equivalente máximo de 0.45%, para se permitir uma boa soldabilidade. O aumento do teor de carbono eleva a resistência e a dureza (redução da ductilidade); porém, o aço resulta mais quebradiço e sua soldabilidade diminui

consideravelmente. Entre os aços-carbono mais usados em estruturas, podemos citar: o ASTM A36 e A570, e os ABNT NBR 7007, 6648, 6649, 6650; DIN St37.

2. Aços de baixa liga: Os aços de baixa liga são os aços carbono acrescidos de elementos de liga em pequena quantidade, tais como: nióbio, cobre, manganês, silício, etc. Os elementos de liga provocam um aumento de resistência do aço, através da modificação da microestrutura para grãos finos. Graças a este fato, pode-se obter resistência elevada com um teor de carbono da ordem de 0.20%, permitindo, ainda assim, uma boa soldabilidade. Entre estes, podemos citar como mais usuais: o ASTM A 572, A441, os ABNT NBR 7007, 5000, 5004; DIN St52 etc.

Tanto os aços-carbono como os de baixa liga podem ter sua resistência aumentada pelo tratamento térmico. Os parafusos de alta resistência, utilizados na fixação de estruturas, são fabricados com aço carbono, sujeito a tratamento térmico (ASTM A325), bem como o aço de baixa liga (ASTM A490).

O aço estrutural mais largamente utilizado é o aço-carbono ASTM A36, também reconhecido como MR-250, apresentando as seguintes características quanto aos limites de resistência:

- Tensão de Escoamento f_y = 250 MPa
Tensão de Ruptura f_u = 400 MPa

A Norma Brasileira NBR 8800 (1986) - Projeto e Dimensionamento de Estruturas de Aço de Edifícios - adota os seguintes valores para as constantes físicas, (vide tabela). Estes valores são considerados constantes à temperatura ambiente.

TABELA 2.1– Constantes Físicas dos Aços Estruturais conforme NBR-8800

Massa Específica	$\rho = 7.850 \text{ kg/m}^3$
Módulo de elasticidade longitudinal	$E = 205.000 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$
Módulo de elasticidade transversal	$G = 78.850 \text{ MPa}$
Coefficiente de dilatação térmica linear	$\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Vários são os fatores que influenciam nas propriedades mecânicas do aço. Entre estes, pode-se citar a composição química, o processo de laminação, tratamento térmico, a técnica de ensaio, a temperatura e a geometria do corpo de prova.

As propriedades mecânicas do aço estrutural são obtidas, preferencialmente, através do ensaio de tração de corpos de prova, fornecendo, como resultado, um diagrama tensão-deformação, segundo Carqueja (1998).

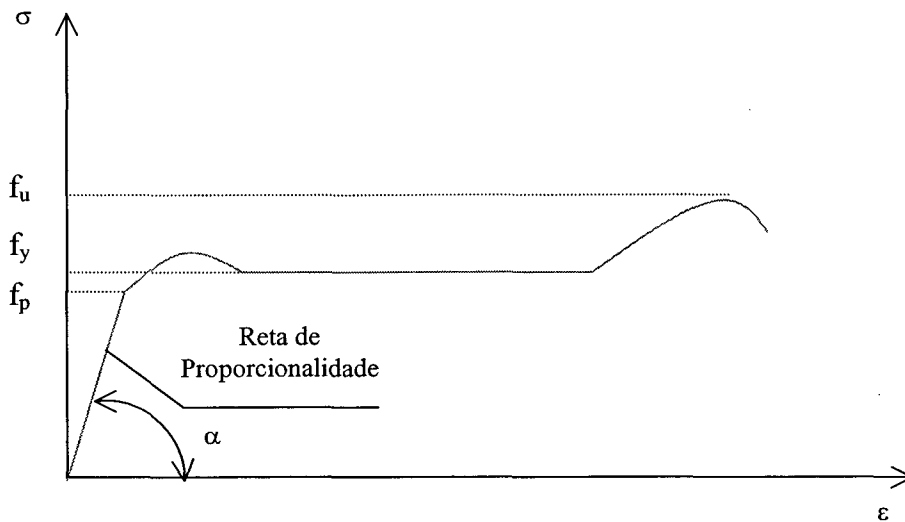


FIGURA 2.1 - Gráfico tensão-deformação do aço estrutural.

Tal diagrama é caracterizado por trechos assim definidos, retirado de NBR – 8800 (1986), Carqueja (1998) e Bellei (1998):

- Limite de Proporcionalidade, f_p : é a tensão máxima do trecho elástico, final da reta de proporcionalidade onde tensões e deformações são proporcionais.
- Limite de Escoamento, f_y : é a tensão correspondente ao patamar de escoamento, trecho onde a tensão se mantém constante e a deformação aumenta.
- Limite de Resistência à Tração, f_u , ou como é comumente chamada, tensão de ruptura: é a tensão máxima que se obtém no ensaio de tração – ápice do diagrama.
- Módulo de Elasticidade ou Módulo de Young (E) : é a relação (razão) entre as tensões e deformações ($E = \sigma / \varepsilon$) – chamada Lei de Hooke. Corresponde ao coeficiente angular do trecho elástico - tangente do ângulo α da reta de proporcionalidade.
- Ductilidade: definida como a capacidade de o aço se deformar sem apresentar ruptura do material. Corresponde à extensão do patamar de escoamento.
- Encruamento: corresponde ao trecho final do diagrama, a partir do fim do escoamento.
- Módulo de Poisson (μ) – é a razão entre as deformações transversais e longitudinais sob carga axial. A NB-14 adota o valor de $\mu = 0.3$ para todos os aços estruturais.

- Módulo de Elasticidade transversal: é a razão entre as deformações transversais e as tensões cisalhantes na zona de proporcionalidade. Pode ser determinado através da seguinte equação:

$$G = \frac{E}{2.(1 + \mu)} \quad (2.1.1)$$

Convém relatar que o diagrama tensão-deformação de aços estruturais é sensível a alterações no seu comportamento em relação aos seguintes fenômenos:

- Temperatura: para altas temperaturas, os valores de f_y e f_u são menores que os encontrados em temperaturas ambientes.

- Tensões residuais: são tensões internas que ocorrem na fabricação de produtos siderúrgicos, devido ao seu resfriamento diferencial, onde as regiões que se resfriam mais rapidamente têm tensões de compressão e as que se resfriam mais lentamente, tensões de tração, ocasionando uma redução do limite de proporcionalidade e um ajustamento na curva entre o trecho elástico e o patamar de escoamento.

- Envelhecimento: durante a execução do ensaio de tração, o corpo de prova sofre vários descarregamentos, imediatamente seguidos por recarregamentos e prosseguimento do ensaio. Caso haja um intervalo muito grande, alguns dias entre o processo, o corpo de prova apresentará um comportamento diferente caracterizado por valores maiores para f_y e f_u e redução do patamar de escoamento – redução da ductilidade do material.

- Fadiga: este fenômeno é caracterizado pela perda de resistência do aço, submetido a cargas variáveis, podendo entrar em colapso com tensões muito inferiores ao limite de escoamento, devido à formação e posterior propagação de fissuras que vão, paulatinamente, reduzindo a seção resistente. O fenômeno é provocado pelos seguintes fatores:

1. amplitude de variação das tensões : $\Delta f = f_{\text{máx}} - f_{\text{min}}$
2. frequência de aplicação das cargas;
3. tipo de entalhe (furos, recortes, etc.) existentes na seção e que provocam concentração de tensões;

- Corrosão: ocorre com peças de aço situadas em lugares agressivos, indústrias de produtos químicos, mar, etc, e/ou devido a elementos não protegidos. A longo prazo tende a diminuir a seção resistente;

No presente estudo, o diagrama de tensão-deformação do aço se caracterizará por um comportamento elasto-plástico linear perfeito, sendo que estas possíveis

alterações, citadas anteriormente, no seu diagrama não farão parte do escopo deste estudo.

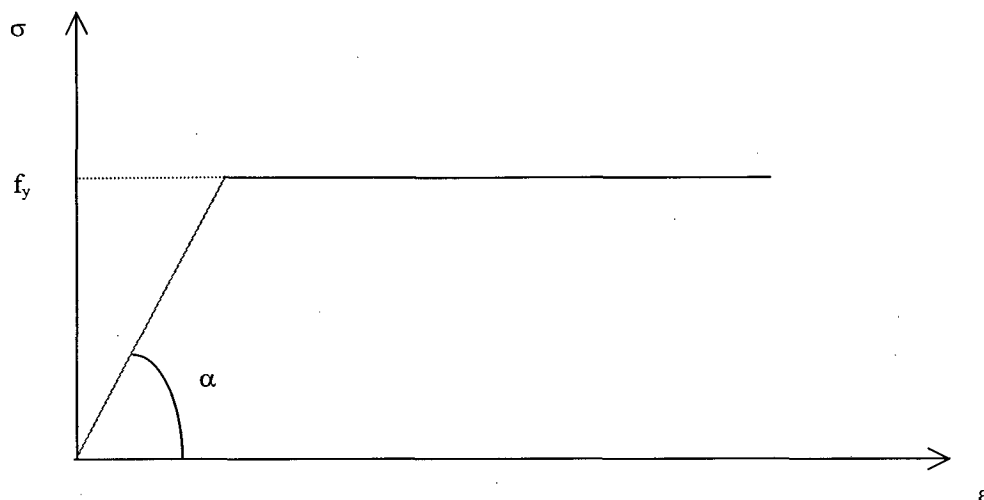


FIGURA 2.2 - Gráfico tensão-deformação projetado considerando comportamento elasto-plástico ideal do aço.

2.1.1 Levantamento dos Tipos e Características das Ligações.

Para se compor uma estrutura metálica, necessita-se de fixadores para sua montagem e ligação dos perfis. As ligações de peças de aço são feitas de 2 modos:

- a) por meio de solda;
- b) por meio de furos e conectores;

O grupo dos conectores compreende os parafusos comuns e parafusos de alta resistência, pinos, rebites e parafusos ajustados, sendo que os três últimos são utilizados com menor frequência.

A prática moderna procura combinar as vantagens dos 2 meios de ligação, solda e parafusos, realizando toda a fabricação de oficina à base de solda, e as emendas de montagem com furos e conectores. Dependendo do tipo de ligação a ser idealizada pelo projetista estrutural, os elementos de ligação, como por exemplo, enrijecedores, chapas de ligação, cantoneiras, consolos, etc., apresentam-se como ferramentas bastante úteis, auxiliando freqüentemente na interação viga-pilar.

Segundo CHEN et al. (1989), os modos padrões de fixadores das ligações utilizados são:

- rebite;
- parafuso;
- rebite na viga e parafuso na coluna;

- parafuso na viga e rebite na coluna;
- rebite na viga e solda na coluna;
- parafuso na viga e solda na coluna;
- solda na viga e rebite na coluna;
- solda na viga e parafuso na coluna;
- rebite sem enrijecedor na coluna;
- rebite com enrijecedor na coluna;
- parafuso sem enrijecedor na coluna;
- parafuso com enrijecedor na coluna;
- todos os modos incluídos.

De acordo com o American Institute of Steel Construction (AISC) apud Dhillon (1989), os tipos de arranjos entre viga-pilar com suas geometrias e os fixadores padrão acima citados são assim classificados, em ordem crescente de rigidez:

1. “single web-angle”;
2. “double –web-angle”;
3. “header plate”;
4. “top and seat angle”;
5. “end-plate without stiffners”;
6. “end-plate with stiffners”;
7. “t-stub”;

As figuras seguintes apresentam a geometria dos tipos de ligações citadas:

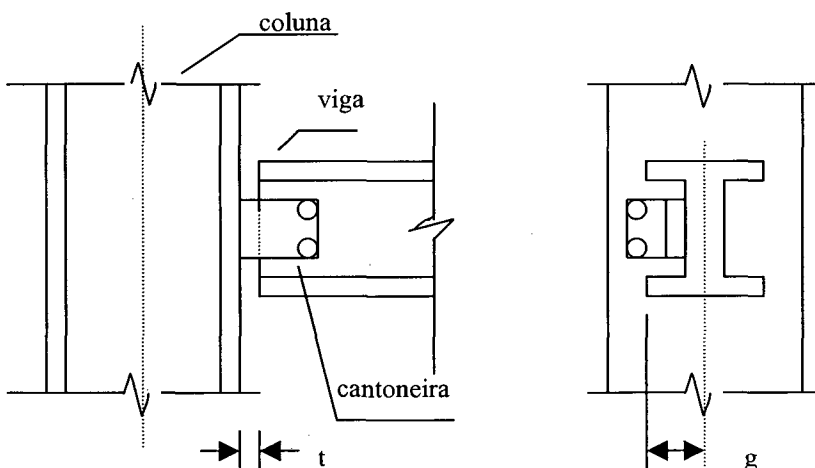


FIGURA 2.3 – Típica conexão viga-pilar metálica “single web angle”.

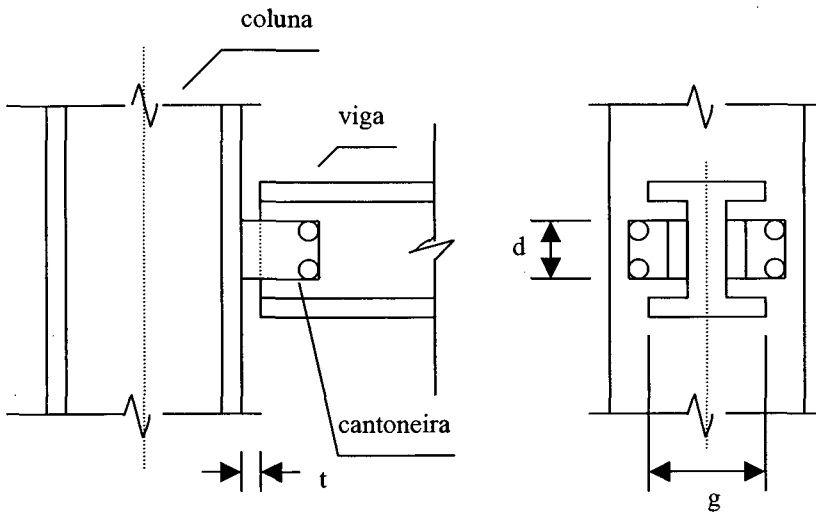


FIGURA 2.4 – Típica conexão viga-pilar metálica “double web angle”.

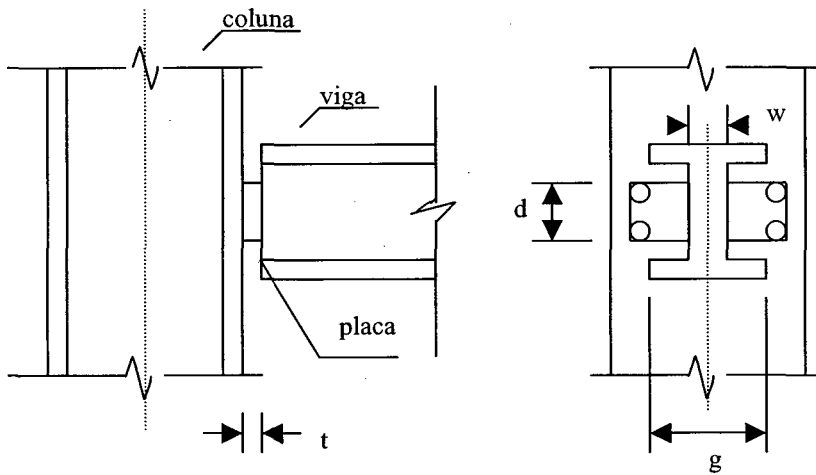


FIGURA 2.5 – Típica conexão viga-pilar metálica “header plate”.

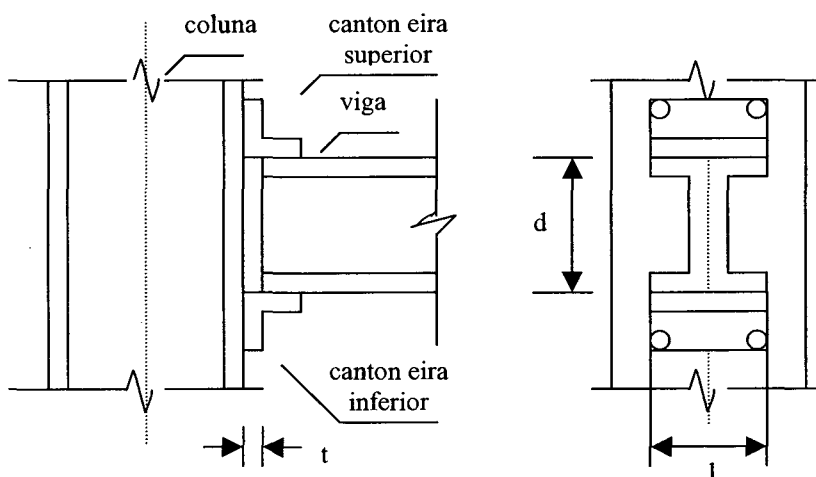


FIGURA 2.6 – Típica conexão viga-pilar metálica “top and seat angle”.

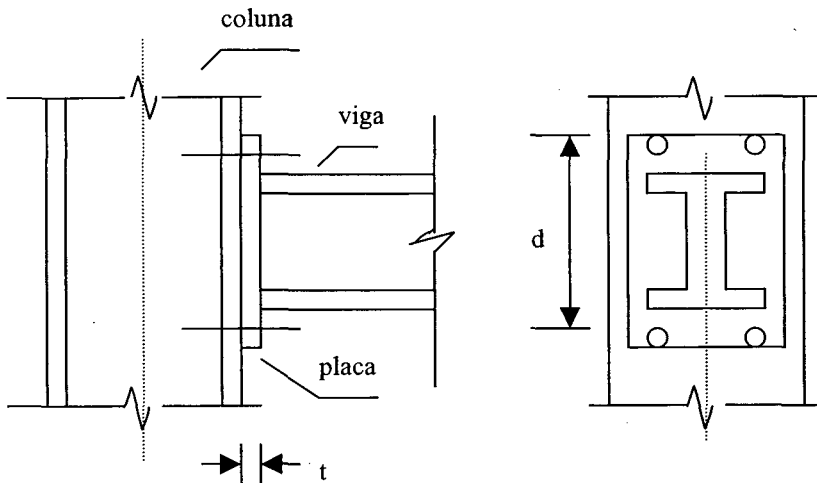


FIGURA 2.7 – Típica conexão viga-pilar metálica “end plate without stiffeners”.

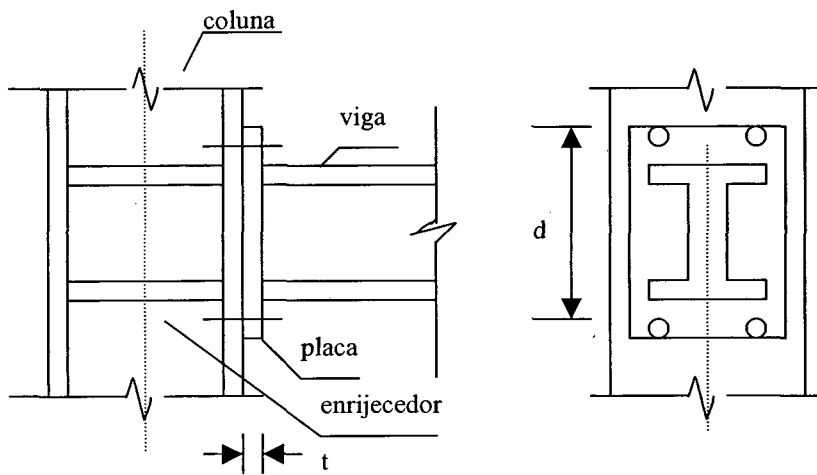


FIGURA 2.8 – Típica conexão viga-pilar metálica “end plate with stiffeners”.

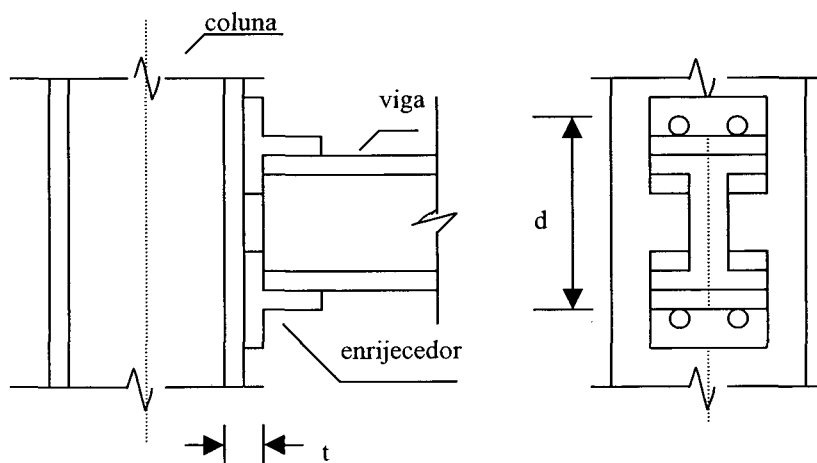


FIGURA 2.9 – Típica conexão viga-pilar metálica “tee-stub”.

CHEN et al. (1989) apresentaram a descrição e comentários do comportamento desses sete tipos de ligações metálicas padrão entre viga-pilar como se segue, acrescidos de mais três tipos de arranjos de sua autoria: “single plate connections”, “extended end-plate connections” e “flush end-plate connections”.

✓ **“Single Web-Angle Connections” / “Single Plate Connections”:**

As ligações “single web-angle” consistem na utilização de uma cantoneira em L, parafusada ou soldada na alma da viga e coluna.

“Single plate connections” difere da anterior por utilizar uma placa ao invés da cantoneira para se determinar a fixação entre viga e coluna. Caracteriza-se por necessitar menos material do que a conexão por cantoneira.

Geralmente, a ligação por placa apresenta rigidez ao momento fletor igual ou maior do que por cantoneira.

Estes tipos de conexões são normalmente modeladas e classificadas como articuladas. Apresentam como característica principal a grande capacidade de se deformar por flexão. Fisicamente a viga transfere somente esforço cortante para a coluna.

✓ **“Double Web-Angle Connections”:**

É formada pela composição de duas cantoneiras parafusadas ou rebitadas na alma da viga e coluna.

Os primeiros testes utilizando rebites como meio de ligação foram realizados por Rathbun em 1936.

A partir de 1950, o aumento de especificações de cálculo de estruturas metálicas permitiu o uso de parafusos de maior resistência no lugar de rebites, sendo atualmente o meio de ligação mais difundido.

A adoção de duas cantoneiras neste tipo de ligação supera, em termos de rigidez, as ligações por placas e duplamente as “single-web angle connections”, como esperado.

Este tipo de ligação apresenta uma deformação rotacional significativa e por isso é identificado, geralmente, como ligação articulada.

✓ **“Header Plate Connections”**

Consistem numa placa com comprimento menor do que a altura da viga, soldada na alma da viga e parafusada na coluna.

Estas conexões apresentam coeficiente de rigidez superior às conexões “double web-angle” para qualquer nível de solicitação de carga.

Usualmente são denominadas como ligações articuladas por transmitirem a reação da viga para a coluna.

✓ **“Top-and Seat-Angle Connections”/ “Top-and Seat-Angle Connections with Double Web-Angle”:**

As conexões “Top-and Seat-Angle”, compostas por uma ou duas cantoneiras ligadas na alma da viga são consideradas ligações semi-rígidas na especificação do AISC-LRFD e pertencem à construção do tipo “Partially Restraint” (PR).

De acordo com a especificação do AISC (1978), o comportamento da ligação “top- and – seat angle” é descrito da seguinte forma:

- a cantoneira inferior transmite somente reação vertical e não deve apresentar momento de restrição significativo sobre a extremidade final da viga;
- a cantoneira superior simplesmente tem por função a estabilidade lateral da ligação não sendo considerada para suportar quaisquer cargas gravitacionais;

Constatou-se através de ensaios experimentais que estas conexões transmitem algum momento final para a viga, qualificando-as, assim, como conexão metálica do tipo parcialmente restringida (P.R.) pela especificação do AISC-LFRD.

As conexões “Double Web-Angle” são usadas para aumentar a restrição das conexões “Top and Seat-angle” e , também, transferir esforço cortante.

A exemplo das conexões “ double web-angle ”, os rebites utilizados como meio de ligação entre viga-pilar foram substituídos pelos parafusos de alta resistência, por razões já apresentadas para as conexões “Double Web-Angle”.

✓ **“Extended End-Plate Connections” /“Flush End-Plate Connections”:**

As conexões “end-plate” apresentam-se soldadas na viga ao longo da mesa e da alma e parafusadas na coluna metálica. Geralmente, estes procedimentos de soldagem e fixação de parafusos são efetuados na oficina de fabricação e no campo de trabalho, respectivamente.

Esta ligação, largamente utilizada desde a década de 60, apresenta dois tipos de classificação:

- Ligação “end-plate” sobre o lado tracionado é comumente utilizada.
- Ligação “end-plate” sobre o lado tracionado e comprimido é aplicada quando as conexões estão sujeitas a momentos reversos: como durante um carregamento típico de terremoto (cíclico);

As ligações “end-plate” são comumente consideradas como tipo “Fully Rigid” (F.R.), ou seja, apresentam uma elevado grau de rigidez, ocasionando pequena

deformação angular da viga-coluna, contribuindo para grande transferência do momento fletor no final da viga para a coluna.

Quando é necessário um nível de rigidez maior para as ligações “end-plate”, são utilizados enrijecedores como forma de prevenir deformação por momento na mesa-coluna, influenciando positivamente no comportamento da placa e dos meios de ligação.

As conexões metálicas “flush end-plate” distinguem-se por serem soldadas somente ao longo da alma da viga e parafusadas na mesa da coluna.

Elas apresentam rigidez menor do que as ligações que se utilizam de placas contínuas ao longo da alma e da mesa da viga. São freqüentemente aplicadas nas construções de telhado.

✓ **“Tee-Stub”:**

As conexões denominadas “tee-stub”, caracterizam-se pelo seu elevado grau de rigidez da conexão viga-pilar de estruturas metálicas, com praticamente nenhuma deformação rotacional relativa, proporcionando total continuidade de momento fletor nos elementos conectados.

Utilizam-se de elementos de ligação através de enrijecedores, soldados nas extremidades superior e inferior da viga e parafusos de alta resistência, na coluna.

Usualmente, no cálculo estrutural das ligações metálicas existem dois tipos de modelo para a conexão:

1. *Ligações articuladas : (rótula perfeita)*

- ✓ não existe continuidade rotacional, implicando nenhuma transferência de momento fletor entre a viga e o pilar;
- ✓ são considerados os elementos viga-pilar, trabalhando independentemente um do outro;
- ✓ não apresentam impedimento para a ocorrência de giro relativo entre as peças conectadas;
- ✓ a ligação é geralmente considerada flexível, se a rotação relativa entre as partes após o carregamento, atingir 80% ou mais daquela teoricamente esperada, caso a conexão seja totalmente livre de girar.
- ✓ em um gráfico momento versus rotação da conexão, tais ligações são representadas por uma reta paralela à abcissa referente ao eixo da rotação, não suportando nenhum momento fletor.

2. Ligações rígidas:

- ✓ a continuidade rotacional existente provoca a completa transferência de momento;
- ✓ total interação viga-pilar;
- ✓ todos os deslocamentos relativos entre as peças conectadas são impedidos, isto é, não há alteração no ângulo relativo entre elas, com uma restrição à rotação da ordem de 90% ou mais, daquela teórica necessária à ocorrência de nenhuma rotação.
- ✓ se fosse plotado num diagrama momento versus rotação da ligação viga/pilar, as ligações rígidas se caracterizariam por uma reta paralela à ordenada do momento fletor, não apresentando deformação rotacional da conexão.

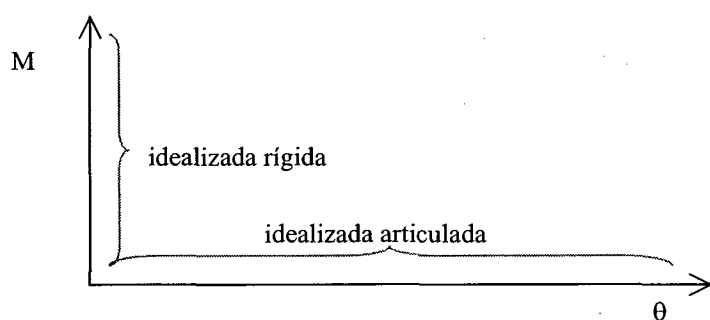


FIGURA 2.10 – Idealização das ligações rígidas e articuladas num diagrama momento-rotação da ligação viga-pilar.

Verifica-se que estas conexões tradicionais, rígidas e articuladas, apresentam resultados que diferem dos obtidos na prática e nas análises experimentais. Na realidade, as conexões apresentam rigidezes intermediárias às citadas, devendo ser classificadas em outro tipo de conexão: *semi-rígida*. Esta ligação apresenta resistência ao giro relativo, mas não possui rigidez suficiente para impedir todo o deslocamento entre as peças. Neste caso, a restrição à rotação situa-se geralmente entre 20 e 90% daquela teoricamente necessária para evitar qualquer rotação.

Da análise do comportamento destes tipos de arranjos, segundo um diagrama momento-rotação retirado de DHILLON et al. (1989), verifica-se a não-linearidade da curva e o efeito da flexibilidade. Nota-se, figura 2.1.11, que as conexões mais flexíveis, “single web-angle”, “double web-angle” e “header plate”, apresentam patamar de escoamento bem definido, possuindo uma boa capacidade de redistribuição dos esforços. Já as conexões “t-stub” e “end plate with stiffeners” apresentam significativo coeficiente de rigidez inicial, mas possuem pequena capacidade de deformação rotacional.

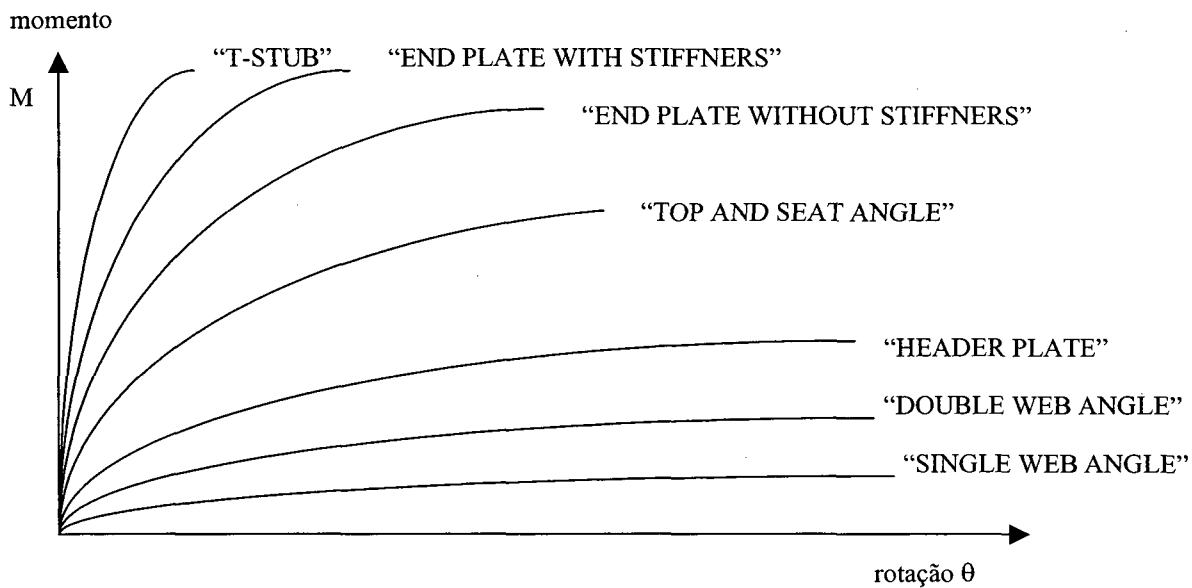


FIGURA 2.11 – Comportamento não-linear dos sete tipos usuais de ligação viga-pilar, retirado de Dhillon et al (1989).

O “American Institute of Steel Construction” (AISC) apud Salmon et al (1990) classifica a construção de aço em três tipos de conexão, bem como sua aplicabilidade. Apresenta, de acordo com as seções AISC –1.2, o cálculo das tensões de trabalho e o AISC –2.1, o cálculo plástico – estado limite último.

1- “AISC Type 1. Rigid-frame”, onde a total continuidade é proporcionada à conexão de tal forma que os ângulos originais entre os membros interceptados são mantidos virtualmente constantes; isto é, com restrição à rotação na ordem de 90% ou mais daquela necessária para prevenir qualquer mudança de ângulo. Tais conexões são utilizadas nos dois métodos de cálculo: tensão de serviço e plástico.

2- “AISC Type 2. Simple framing”, onde a restrição rotacional nas extremidades dos membros é considerada relativamente pequena em relação à encontrada na prática. Para vigas, articulações fornecem somente transferência do cortante nas suas extremidades. Pode-se considerar a flexibilidade total da ligação, caso o ângulo entre os elementos interceptados atinjam pelo menos 80% do ângulo de uma articulação perfeita. O cálculo de vigas articuladas, sob tensões de serviço, utiliza as conexões “Type 2”. Elas não são usadas no cálculo plástico, exceto para conexões de elementos transversos ao plano da estrutura em que a resistência é desenvolvida.

3- “AISC Type 3. Semi-rigid framing”, onde a restrição rotacional está entre 20 e 90% daquela necessária a impedir qualquer mudança de ângulo relativo. Alternativamente,

pode-se considerar estruturas semi-rígidas quando o momento transmitido através do nó não é próximo de zero como nas estruturas articuladas, nem momento totalmente contínuo, como assumido na análise elástica rígida. AISC- 1.2 relata que o cálculo de construção usando as conexões do tipo 3 pode ser usada quando “ *as conexões das vigas e vigas-mestra possuam uma capacidade de momento seguro e conhecido com grau intermediário entre as conexões rígidas, “Type 1”, e flexíveis, “Type 2”.* “

As conexões semi-rígidas não são usadas no cálculo plástico e somente raramente usadas no cálculo das tensões de serviço, principalmente pela dificuldade de avaliar o grau de restrição da ligação.

Segundo Salmon et al (1990), para melhor entendimento da distinção prática entre os três tipos de conexão da estrutura, (rígida, semi-rígida e articulada), a utilização do método da “beam-line” desenvolvido por Batho e Rowan e utilizada por Surochnikoff pode ser útil.

Este é um método gráfico antigo, constituído de um processo simples e prático para se determinar o grau de flexibilidade atual da conexão viga-pilar.

A sua aplicação consiste em determinar a equação da reta “beam-line”, a curva momento-rotação real da conexão e o ponto de interseção da reta com a curva, como se segue:

- ✓ A reta “beam-line” é obtida pela união de dois pontos num gráfico momento-rotação. O primeiro ponto é situado ao longo da ordenada do gráfico, referindo-se ao momento de engastamento perfeito de uma viga genérica, apresentando suas extremidades idealizadas engastadas (rígidas). O outro ponto é encontrado ao longo do eixo das abcissas, considerando a extremidade da viga livre para girar (articulada).
- ✓ A curva momento-rotação real da conexão é estabelecida por ensaios experimentais ou por processos analíticos (atualmente, via Método dos Elementos Finitos).
- ✓ O ponto de interseção da reta com a curva corresponde ao momento e respectiva rotação da conexão viga-pilar.

Esse método pode ser aplicado para cada tipo de estrutura estudada. Sendo dependente das propriedades, características e carregamento da estrutura apresentada.

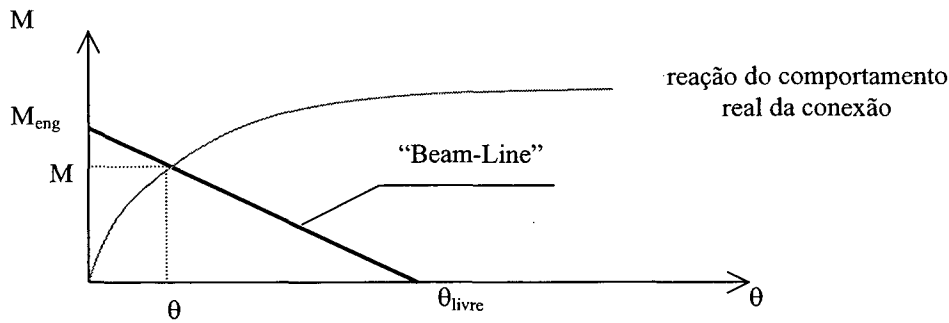


FIGURA 2.12 – Aplicação do método da “beam-line” para se determinar o grau de flexibilidade real da conexão viga-pilar.

A seguir, são apresentadas as idéias básicas do método.

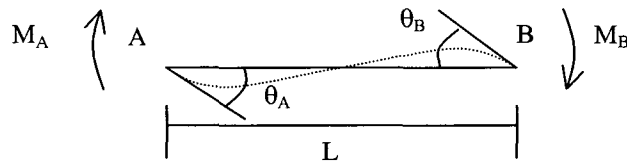


FIGURA 2.13 – Viga sujeita a momentos de engastamento M_A e M_B .

Dada uma viga carregada de uma forma genérica e sujeita a momentos de engastamento M_A e M_B , com inclinações nas extremidades de θ_A e θ_B .

Os momentos necessários para ter $\theta_A = \theta_B = 0$ são designados por M_{FA} e M_{FB} , momentos de engastamento perfeito.

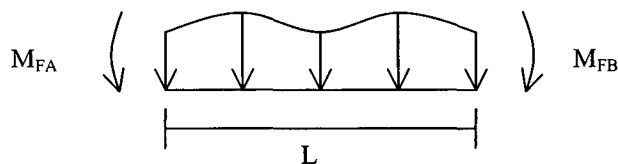
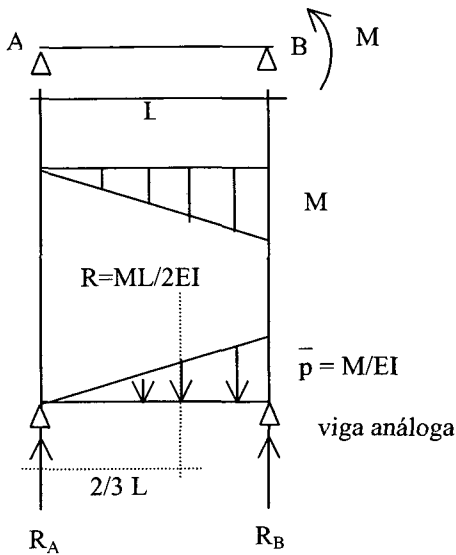


FIGURA 2.14 – Viga sujeita a momentos de engastamento perfeito, M_{FA} e M_{FB} , para um carregamento genérico.

Determinação dos ângulos θ_A e θ_B , por Analogia de Mohr.



$$\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$R_A + R_B = \bar{p} \cdot \frac{L}{2}$$

$$R_A + R_B = \frac{M}{EI} \cdot \frac{L}{2} \quad ; \text{equação 1}$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0$$

$$R_B \cdot L - \bar{p} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot L = 0$$

$$R_B \cdot L = \frac{M \cdot L^2}{3EI} \therefore R_B = \frac{M \cdot L}{3EI} \quad ; \text{equação 2}$$

equação 2 em 1:

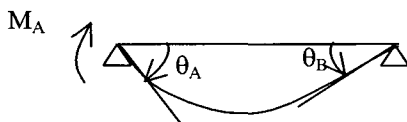
$$R_A = \frac{M \cdot L}{2EI} - \frac{M \cdot L}{3EI} = \frac{M \cdot L}{6EI}$$

FIGURA 2.15 – Aplicação do método de Analogia de Mohr à viga AB.

Pelo Método da Analogia de Mohr, os esforços cortantes, representados por R_A e R_B , representam as rotações respectivas para cada extremidade da barra AB.

A seguinte convenção é utilizada no método:

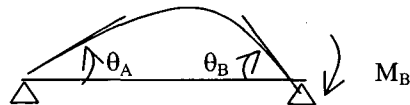
Momento no sentido anti-horário positivo, conseqüentemente deslocamento rotacional no sentido anti-horário também positivo.



θ_A - negativo
 θ_B - positivo

$$\theta_A = -\frac{M_A L}{3EI} \quad (2.1.2)$$

$$\theta_B = +\frac{M_A L}{6EI}$$



θ_A - positivo
 θ_B - negativo

$$\theta_A = +\frac{M_B L}{6EI} \quad (2.1.3)$$

$$\theta_B = -\frac{M_B L}{3EI}$$

Resolvendo em função dos momentos atuantes nas extremidades das barras, de acordo com figura 2.13, tem-se:

$$\theta_A = -\frac{M_A \cdot L}{3EI} + \frac{M_B \cdot L}{6EI} \quad (2.1.4)$$

$$\theta_B = -\frac{M_B \cdot L}{3EI} + \frac{M_A \cdot L}{6EI} \quad (2.1.5)$$

Isolando o momento na extremidade A da viga pela eq. (2.1.3) , tem-se:

$$\frac{M_A}{3} = \frac{EI}{L} * \theta_A + \frac{M_B}{6} \quad (2.1.6)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por 1/2, tem-se:

$$\frac{M_A}{6} = \frac{EI}{2L} * \theta_A + \frac{M_B}{12} \quad (2.1.7)$$

Isolando o momento M_B da viga na equação (2.1.4), tem-se

$$\frac{M_B}{3} = \frac{EI}{L} * \theta_B + \frac{M_A}{6} \quad (2.1.8)$$

Substituindo a equação (2.1.6) e (2.1.7), tem-se:

$$\frac{M_B}{3} = \frac{EI}{L} * \theta_B + \frac{EI}{2L} * \theta_A + \frac{M_B}{12}$$

$$\frac{3M_B}{12} = \frac{EI}{L} * \theta_B + \frac{EI}{2L} * \theta_A$$

$$M_B = 4 \frac{EI}{L} * \theta_B + 2 \frac{EI}{L} * \theta_A \quad (2.1.9)$$

Por analogia,

$$M_A = 4 \frac{EI}{L} * \theta_A + 2 \frac{EI}{L} * \theta_B \quad (2.1.10)$$

Adicionando os momentos de engastamento perfeito por superposição dos efeitos, chega-se à equação da deformada dos ângulos relativos à rotação da viga:

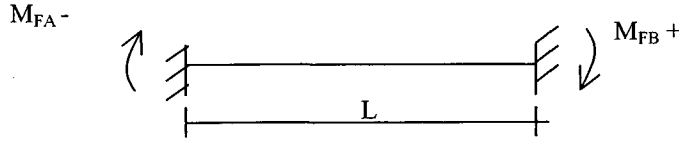


FIGURA 2.16 – Viga sujeita a momentos de engastamento perfeito M_{FA} e M_{FB} .

Escrevendo as equações das deformadas, têm-se:

$$M_A = M_{FA} + \frac{4 * EI}{L} * \theta_A + \frac{2 * EI}{L} * \theta_B \quad (2.1.11)$$

$$M_B = M_{FB} + \frac{2 * EI}{L} * \theta_A + \frac{4 * EI}{L} * \theta_B \quad (2.1.12)$$

Resolvendo a equação (2.1.10) e (2.1.11) para θ_A e θ_B , tem-se:

$$M_A - M_{FA} = \frac{4 * EI}{L} * \theta_A + \frac{2 * EI}{L} * \theta_B \quad \therefore (M_A - M_{FA}) - \frac{4 * EI}{L} * \theta_A = \frac{2 * EI}{L} * \theta_B$$

\therefore multiplicando os dois lados da equação por 2, tem-se:

$$\therefore 2 * \left[(M_A - M_{FA}) - 4 * \frac{EI}{L} * \theta_A \right] = 4 * \frac{EI}{L} * \theta_B \quad (2.1.13)$$

Substituindo a equação (2.1.12) em (2.1.11) :

$$M_B = M_{FB} + 2 * \frac{EI}{L} * \theta_A + 2 * \left[(M_A - M_{FA}) - 4 * \frac{EI}{L} * \theta_A \right]$$

$$M_B = M_{FB} + 2 * \cancel{\frac{EI}{L} * \theta_A} + 2 * (M_A - M_{FA}) - 8 * \cancel{\frac{EI}{L} * \theta_A} \quad \therefore$$

$$\therefore M_B - M_{FB} = 2 * (M_A - M_{FA}) - 6 * \frac{EI}{L} * \theta_A \quad \therefore$$

$$\therefore 6 * \frac{EI}{L} * \theta_A = 2 * (M_A - M_{FA}) - (M_B - M_{FB}) \quad (2.1.14)$$

\therefore por analogia:

$$6 * \frac{EI}{L} * \theta_B = 2 * (M_B - M_{FB}) - (M_A - M_{FA}) \quad (2.1.15)$$

Subtraindo a equação (2.1.13) da equação (2.1.14), tem-se:

$$6 * \frac{EI}{L} * (\theta_A - \theta_B) = 3 * (M_A - M_B) - 3 * (M_{FA} - M_{FB}) \quad (2.1.16)$$

Considerando o carregamento sendo simétrico, tem-se:

$$M_B = -M_A \quad ; \quad \theta_B = -\theta_A \quad ; \quad M_{FB} = -M_{FA}$$

Assim sendo, a equação (2.1.15) se transforma em:

$$6 * \frac{EI}{L} * (\theta_A - (\theta_A)) = 3 * (M_A - (-M_A)) - 3 * (M_{FA} - (-M_{FA})) \quad \therefore$$

$$\therefore 6 * \frac{EI}{L} * (2 * \theta_A) = 3 * (2 * M_A) - 3 * (2 * M_{FA}) \quad \therefore$$

$$\therefore 12 * \frac{EI}{L} * (\theta_A) = (6 * M_A) - (6 * M_{FA}) \quad \therefore \text{dividindo ambos os lados por 6, obtém-se:}$$

$$\therefore M_A = M_{FA} + 2 * \frac{EI}{L} * \theta_A \quad (2.1.17)$$

Representa a equação da “beam line” para carga de serviço.

A título de ilustração dos valores do momento e rotação para dois casos extremos de restrição do apoio, tem-se, como exemplo:

$$\text{apoio rígido} \rightarrow \theta_A = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = M_{FA} \quad (2.1.18)$$

$$\text{rótula no apoio} \rightarrow M_A = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_A = -\frac{M_{FA}}{\frac{2 * EI}{L}} \quad (2.1.19)$$

A seguir, é apresentado um exemplo prático de uma viga AB, com carga uniformemente distribuída w , e comprimento L .

Para uma viga simplesmente apoiada, a seguinte rotação no apoio A é encontrada:

$$\bullet \quad \theta_A = -\frac{M_{FA}}{\frac{2 * EI}{L}} = \frac{w * L^3}{24 * EI} \quad ; \quad (2.1.20)$$

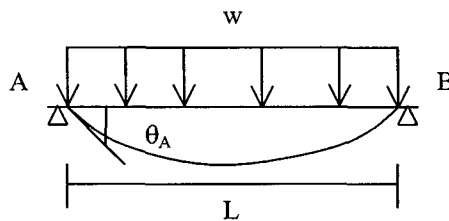


FIGURA 2.17 – Rotação no apoio A de uma viga simplesmente apoiada.

Para uma viga bi-engastada, encontra-se o seguinte momento de engastamento perfeito:

$$\bullet \quad M_{FA} = -\frac{w * L^2}{12} \quad ; \quad (2.1.21)$$

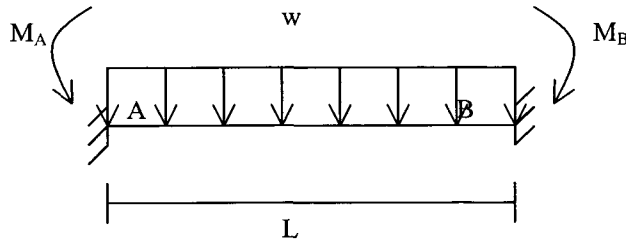


FIGURA 2.18 – Viga sujeita a momentos de engastamento M_A e M_B .

Os valores dos momentos e rotações calculados para uma viga com carregamento uniformemente distribuído w , comprimento L com vinculação engastada e apoiada, respectivamente, são plotados num diagrama momento versus rotação, onde se utilizou o método da “Beam-Line” para carga de serviço, simulando uma carga última com fator de majoração de 1.67 segundo norma. Também é mostrado, em termos de classificação, os três tipos de modelos para a conexão, tipo 1, 2 e 3.

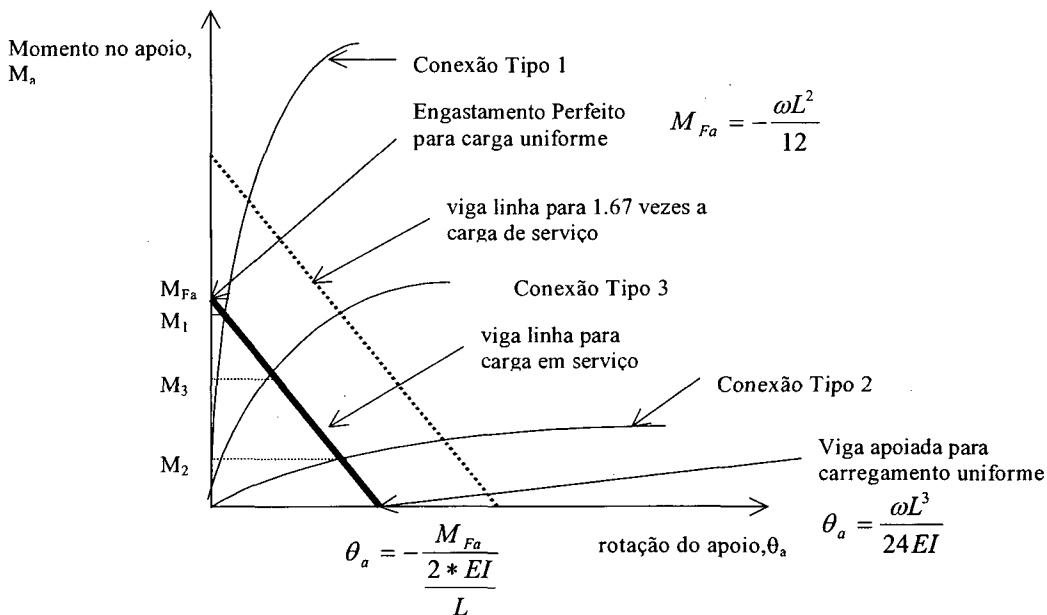


FIGURA 2.19 – Diagrama M-θ, ilustrando a equação da viga-linha e também o comportamento das curvas momento-rotação das conexões dos tipos 1, 2 e 3, de acordo com Salmon (op.cit.).

Observa-se no gráfico que a típica conexão rígida teria suportado o momento no apoio M_1 , de 90% ou mais do M_{Fa} ; portanto, seu grau de restrição é da ordem de 90%. A conexão articulada (tipo 2) pode ter resistido somente 20% ou menos do que o momento M_{Fa} , como indicado pelo momento M_2 , enquanto a conexão semi-rígida pode

ser esperada resistir algum valor intermediário M_3 , provavelmente 50% do momento de engastamento perfeito M_{FA} .

São apresentados a seguir alguns sistemas de classificação dos tipos de conexões metálicas, em função do momento de plastificação da conexão e da capacidade do momento último.

Segundo Bjorhovde et al. (1990) apresenta um sistema de classificação das ligações adimensional, para qualquer tipo de conexão viga-pilar de estruturas metálicas, em termos de rigidez, resistência e ductilidade. Esse sistema é baseado na consideração que as conexões podem ser associadas a um certo comprimento de referência de viga. Isto se deve ao fato de que a rotação é a principal deformação a ser avaliada no comportamento das conexões. O comprimento de referência da viga é escolhido de tal forma que a rigidez inicial da viga seja a mesma da conexão. Através de vários resultados experimentais realizados, segundo Kishi et al (1986) apud Bjorhovde et al. (1990), encontrou-se um valor para o comprimento de referência da viga cinco vezes a sua altura. De uma forma ilustrativa, para conexões rígidas é necessário pequeno comprimento equivalente da viga, para se ter $C = C_c$.

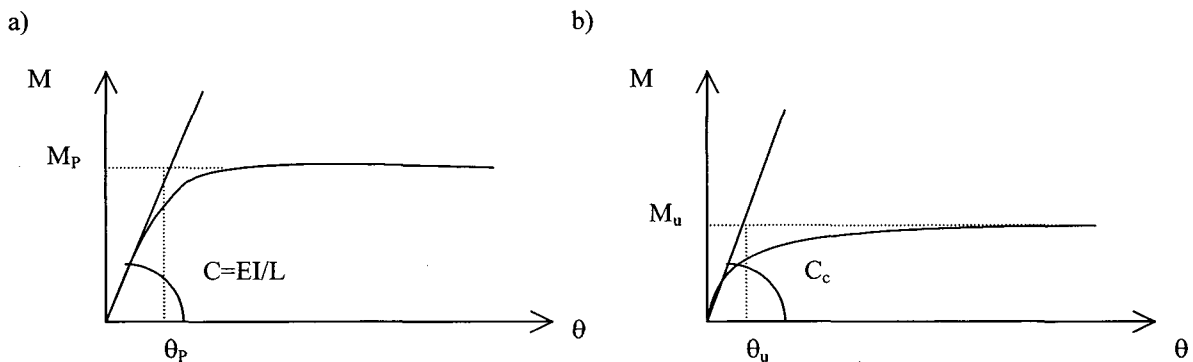


FIGURA 2.20 – Diagrama momento rotação da viga, a), e conexão, b), representando as suas respectivas rigidezes, C e C_c .

Para a escolha dos níveis de capacidade dos momentos últimos, segundo Bjorhovde et al (op.cit), têm-se:

- ✓ Rígido: limite igual ou superior a 0,7 vezes o momento de plastificação total da viga conectada;
- ✓ Semi-Rígido: limite entre $0,2 M_p$ e $0,7 M_p$;
- ✓ Flexível : limite igual ou inferior $0,2 M_p$;

Em que:

M_p – capacidade do momento plástico total da viga conectada;

M_u – capacidade do momento último da conexão;

Para conexões rígidas, de acordo com Bjorhovde et al (1990), pode ser necessário um limite da capacidade do momento último maior que $0,7 M_p$ ou, talvez, até maior do que $1,0 M_p$. Alternativamente, de acordo com a classificação do Eurocode 3 (EC 3) em 1992 apud Goto et al. (1997), o valor limite entre conexão semi-rígida e rígida corresponde a 100% do momento plástico total da viga conectada.

A ductilidade requerida, de acordo com Bjorhovde (1990), é baseada na magnitude da capacidade rotacional θ_R da conexão, podendo ser representada como um múltiplo da rotação plástica teórica θ_u da conexão. A ductilidade requerida adimensional, $\bar{\theta}_R$, é dada pela relação:

$$\bar{\theta}_R = \frac{\theta_R}{\theta_p} \quad (2.1.22)$$

θ_p representa a capacidade rotacional plástica da viga.

No gráfico, (figura 2.21), $\bar{\theta}_R$ é representada pela reta inclinada que intercepta o eixo de rotação no ponto 2.7 e a linha de M_p no valor de $\theta_R = 1.2$. Bjorhovde et al (1990) conclui que, quanto mais flexível é uma ligação, mais ela necessita de ductilidade.

Um tópico bastante importante relaciona os estados limites de análise das estruturas (barras, elementos e meios de ligação) para o seu dimensionamento. De acordo com a norma brasileira de estruturas de aço, NBR 8800 (1986), existem dois tipos de métodos de estados limites:

- Estado Limite de Utilização: quando o comportamento da estrutura é avaliado segundo as cargas normais de serviço, ou seja, sem coeficientes de majoração. Normalmente, este tipo de análise é limitante em relação às deformações excessivas na estrutura.
- Estado Limite Último: “está relacionado com a segurança da estrutura sujeita às combinações mais desfavoráveis de ações previstas em toda a vida útil”. Este limite de cálculo refere-se à ruína da estrutura.

Os estados limites de dimensionamento, utilização e último, podem ser influenciados pelo comportamento das conexões metálicas. Em alguns casos, certas ligações viga-pilar podem ser duplamente classificadas dependendo da análise a ser

utilizada pelo calculista. O exemplo didático a seguir, mostra como pode ocorrer tal situação.

As propriedades das conexões são mostradas nas três curvas abaixo, adotando um diagrama momento-rotação elasto-plástico ideal, retirados de Bjorhovde et al. (1990).

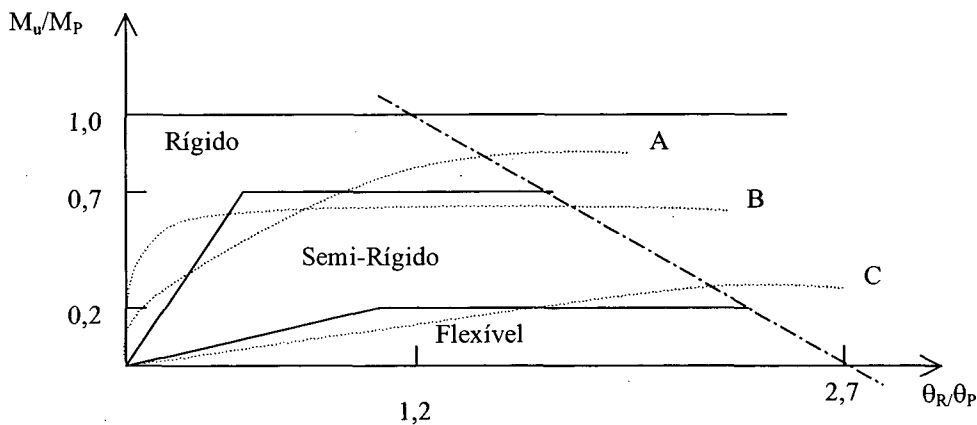


FIGURA 2.21 – Diagrama adimensional de classificação da conexão proposto por Bjorhovde (1990).

Devido ao fato de o diagrama momento-rotação ser idealizado como elasto-plástico perfeito, os estados limites são desta forma identificados:

- Estado Limite de Serviço (E.L.S.): região inicial linear, correspondente à reta de proporcionalidade entre momento e rotação;
- Estado Limite Último (E.L.U.) : refere-se à reta horizontal, correspondendo à capacidade do momento último;

De acordo com a figura 2.21, pode-se ter diferente modelos de conexões para uma mesma ligação dependendo do critério de dimensionamento utilizado.

- Conexão A : apresenta o E.L.S. como uma conexão semi- rígida, mas é rígida no E.L.U.;
- Conexão B : é rígida no E.L.S. e semi-rígida no E.L.U.;
- Conexão C : em termos de utilização a conexão é flexível, porém para o momento último se caracteriza como semi-rígida.

Um novo sistema de classificação de conexões rígidas e semi-rígidas é sugerido por Goto et al. (1997). Neste sistema, utiliza-se o modelo de 3 parâmetros de Kishi e Chen, onde o valor do intervalo de momentos oscila em $1.0 M_p$, e depende dos coeficientes G e λ , onde G denota a rigidez relativa entre viga e coluna e λ é a razão

entre o índice de esbeltez da coluna λ_c e o índice de esbeltez λ_y (correspondente à tensão de escoamento), ou seja:

$$G = \frac{(I_b / L_b)}{(I_c / L_c)} \quad (2.1.23)$$

$$\sigma_y = \frac{\pi^2 * EI}{A * l^2} \rightarrow \sigma_y = \frac{\pi^2 * E}{\lambda^2} \quad \therefore \quad \lambda^2 = \frac{\pi^2 * E}{\sigma_y} \rightarrow \lambda_y = \pi * \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$$

$$\lambda_c = \frac{l_c}{r}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{\lambda_y} = \frac{l_c}{\pi * r * \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}} = \frac{l_c}{\pi * r} * \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad (2.1.24)$$

O termo r é o raio de giração da seção transversal do membro;

É definido um coeficiente adimensional, m_u^b , representando o valor do intervalo da capacidade do momento da conexão entre conexões rígidas e semi-rígidas, pela razão da capacidade do momento último e momento plástico total da viga conectada.

$$\text{rígido} > m_u^b > \text{semi-rígido}$$

A relação dos momentos da conexão pode ser adequadamente aproximada, segundo Goto et al (1998), pela seguinte função:

$$m_u^b = a - b * \lambda \quad (2.1.25)$$

Onde a e b representam funções lineares de λ .

O valor limite da capacidade do momento último da viga conectada, relacionado ao momento de plastificação, aumenta com o acréscimo de λ ou com o decréscimo de G .

Goto et al. (1997) apresentam em uma tabela as fórmulas para o intervalo da capacidade do momento da conexão, m_u^b , para os diferentes tipos de conexões e de acordo com os tipos de arranjos entre viga e pilar.

Verifica-se, através dos sistemas de classificação apresentados anteriormente, a dificuldade em se obter um sistema único e geral para a identificação das conexões. A idéia é fornecer ao calculista estrutural meios para reconhecer o comportamento da conexão em termos de rigidez inicial, resistência e ductilidade. Para objetivos de

estabilidade, o enfoque deve ser dado para os níveis de momento e capacidade de rotação.

2.2 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os ensaios experimentais auxiliam os pesquisadores a ajustar os modelos analíticos proporcionando ferramentas aos projetistas para os cálculos de estruturas usuais.

Constata-se que as principais propriedades das conexões são obtidas pelas curvas momento-rotação, das quais se obtêm os parâmetros para modelar a ligação.

Obviamente, é impraticável a determinação do comportamento à flexão de todas as conexões encontradas na prática. Existe uma gama muito grande de variáveis em questão: a geometria, o tipo de vinculação, a orientação dos membros interceptados e os tipos de carregamentos.

A realização de testes requer um detalhamento minucioso das características da conexão a ser estudada. Com o intuito de se realizar um estudo preciso, adequado e padrão, utilizam-se as classificações do “American Institute of Steel Construction” (AISC), e do “Eurocode 3” (1992), sendo que os tipos de ligações encontrados, na prática, devem ser ajustados e identificados a partir dessas classificações.

Ao se realizar um teste experimental, são necessários aparelhos para medir as cargas aplicadas no corpo-de-prova representando os momentos aplicados na conexão e o deslocamento respectivo rotacional da ligação. Para se obterem os valores das cargas aplicadas no corpo-de-prova, existem vários aparelhos comerciais disponíveis atualmente. Contudo, a determinação dos deslocamentos rotacionais da ligação é de difícil obtenção, e os aparelhos usados neste processo podem ser classificados em quatro principais grupos, de acordo com Kirby et al (1996):

1. inclinação dos membros usando medidor de manômetro ou “Linear Variable Displacement Transducers” (LVDT’S);
2. aparelho de rotação usando gravidade;
3. aparelho ótico usando espelhos;
4. aparelho de rotação usando braço de alavanca e LVDT’S;

Vários estudos experimentais das curvas momento-rotação dos tipos de conexões típicas de viga-coluna têm sido realizados desde a década de 30. Os comportamentos das conexões rebitadas, parafusadas e soldadas têm seus estudos experimentais publicados desde 1936 (Rathbun), onde confirmam a não-linearidade do diagrama momento-rotação das conexões.

A seguir, são apresentados resumidamente alguns estudos experimentais dos tipos de ligação metálica com suas respectivas características, retirados de literatura existente sobre esse assunto.

2.2.1) A determinação do comportamento da conexão viga-pilar pela característica da relação momento-rotação tem sido conduzida com mais afinco na década de 1980, principalmente na “Sheffield UK”, Liege na Bélgica e Milan e Trento na Itália, conforme Kirby et al (1996).

Os primeiros testes realizados em Sheffield utilizaram-se de um arranjo do tipo cruciforme que resulta em duas curvas momento-rotação para cada teste. Os resultados obtidos têm a sua aplicação em ligações internas simétricas e carregamento simétrico, o que podem ser bastante inconveniente na prática.

Com o intuito de apresentar resultados aplicáveis a casos de colunas externas, os arranjos do tipo cantilever entre viga e coluna foram testados posteriormente.

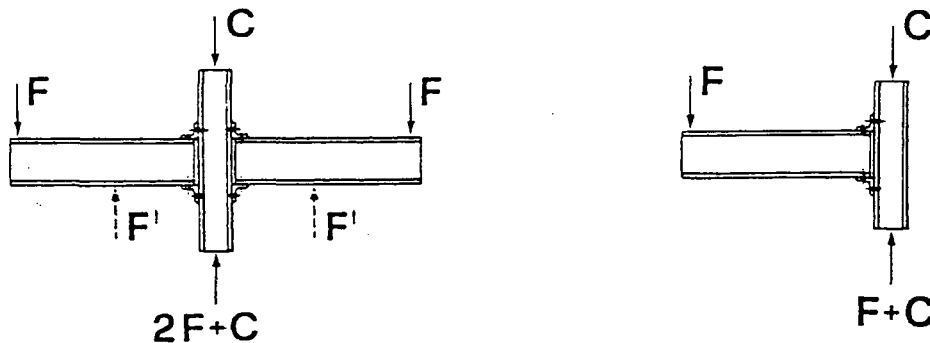


FIGURA 2.22 – Testes com arranjos cruciforme e cantilever retirado de Kirby et al (1996).

Durante uma série de testes recentes realizados usando um arranjo viga-pilar tipo cantilever, observou-se que devido a grandes flexibilidades da conexão, a condição de apoio influencia significativamente a relação momento-rotação da conexão.

Com a utilização de equipamentos modernos de medição de alta precisão, o tempo gasto na realização do ensaio para ajustar o aparelho e o corpo-de-prova foi superado. De acordo com a realização dos testes, é recomendado que a contribuição de

cada elemento que compõe a conexão seja avaliada isoladamente. Desta forma, os testes podem ser conduzidos de modo que os arranjos entre os elementos viga-pilar possam ser reaproveitados. Através de uma combinação aritmética de vários componentes de deformação da ligação, esta abordagem permite simular o comportamento da conexão extrapolando para um caso mais complexo.

Observações da reação momento-rotação nos experimentos tipo cantilever segundo Kirby et al (1996):

- ✓ Na prática, as ligações não ocorrem isoladas, mas como uma parte da estrutura.
- ✓ Vários testes das ligações viga-pilar, com suas flexibilidades, confirmaram a importância das condições de apoio.
- ✓ O modo que a rotação é medida. A avaliação dos resultados dos testes confirmou o conceito dos componentes de distorção, onde a flexibilidade total da ligação pode ser obtida como a acumulação das contribuições de outros componentes de flexibilidade.
- ✓ Quando a rotação de uma viga é medida a alguma distância da conexão. É importante deduzir a parcela devida à ligação e à viga. Isto significa a capacidade de identificar e subtrair da rotação medida, a contribuição devida ao momento do comprimento da viga da face da coluna, resultando na importante influência da rigidez da conexão e no aumento de resistência. A figura 2.23 mostra o teste realizado pelo programa de Milan, onde as rotações foram medidas no local da conexão a uma distância igual à altura da viga por aparelhos de medição LVDT'S.

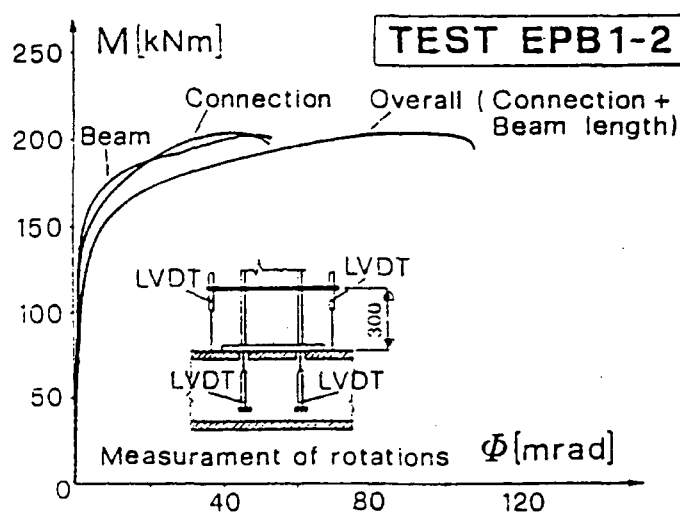


FIGURA 2.23 – Componentes de distorção, retirados de Kirby et al (1996).

2.2.2) Kishi et al. (1990), realizaram estudos sobre a determinação do coeficiente de rigidez inicial e capacidade do momento último das típicas ligações viga-pilar metálicas, utilizando cantoneiras como elementos de ligação. São apresentadas também várias curvas típicas do momento-rotação das ligações viga-pilar que utilizam cantoneiras como elementos de ligação. Os resultados experimentais são comparados com modelos de aproximações analíticos, que se caracterizam por procurar representar adequadamente através de artifícios numéricos o comportamento à flexão da conexão, tais como: modelo dos três parâmetros, modelo exponencial modificado proposto por Kishi e Chen (1986), e modelo polinomial de Frye e Morris (1975). Os testes experimentais dessas conexões viga-pilar metálicas foram realizados na Universidade de Purdue por Kishi e Chen.

Ligações do tipo “Single and Double Web-Angle Connections”.

Rigidez Inicial da Conexão:

A deformação padrão geral da conexão “web angle” é mostrada na figura 2.24a.

Baseado em estudos realizados por Bell et al. (1958) e por Lewitt et al. (1966) apud (Kishi and Chen et al. 1987) sobre as conexões “double web-angle” , assume-se que a cantoneira situada na alma da viga, na região elástica inicial, se comporta da seguinte maneira:

- o efeito da força cortante sobre a deformação da conexão é ignorada;
- a parte da cantoneira conectada na coluna tem um comportamento elasto-linear, enquanto a parte da cantoneira conectada na viga se comporta como um corpo rígido. A deformação da conexão é pequena.
- a parte da cantoneira fixada na mesa da coluna age como uma placa de espessura mediana, em que o suporte fixo é assumido estar preso por uma porca na extremidade, perto da alma, e o momento torsional está em equilíbrio com o momento da conexão que age na borda livre.

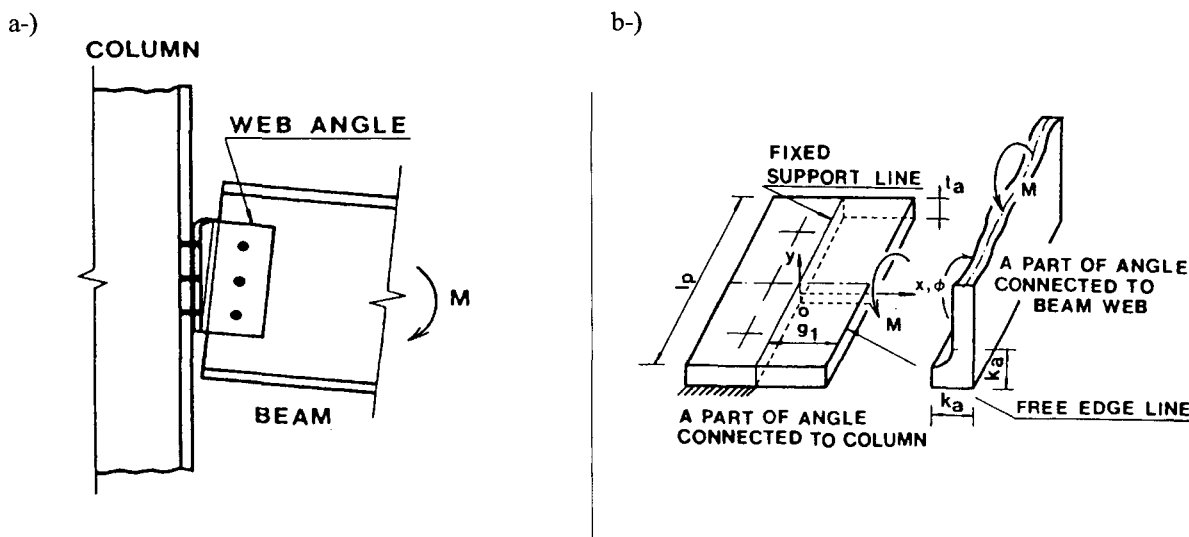


FIGURA 2.24 – Deformação padrão geral de uma conexão “single web angle” com sua respectiva configuração da ligação viga-coluna, retirado de Kirby et al (1990).

Capacidade do momento último:

Baseado em resultados experimentais, descrito por Bell et al. (1958), assume-se o mecanismo global de colapso para estas conexões com cantoneiras ligadas na alma da viga. Uma vez que a distância entre as duas rótulas plásticas apresenta a mesma magnitude, quando comparada com a espessura da cantoneira, deve-se considerar o efeito da força cortante sobre a plastificação do material devido ao momento fletor.

Curvas momento - rotação:

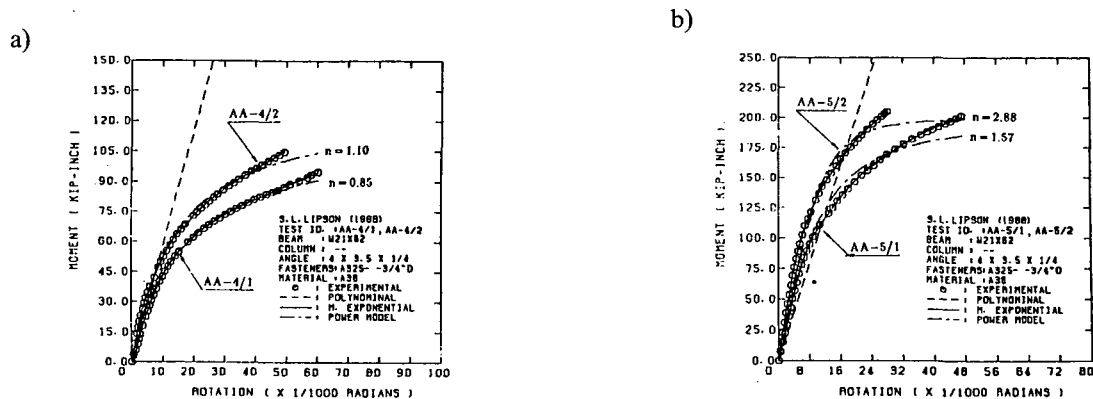


FIGURA 2.25 – Comparação das curvas M- θ para a ligação “Single Web-Angle”, retirado de Kirby et al (1990).

Observa-se que o modelo modificado exponencial se ajusta adequadamente à curva experimental, o mesmo acontecendo para o modelo dos 3 parâmetros de Kishi e Chen, “power model”, que não ocorre no modelo polinomial adotado. Isto é válido também para as curvas momento-rotação “double-web-angle”.

As conexões “single web-angle” foram testadas variando a identificação dos ensaios. Já as conexões “double web-angle”, o segundo teste, (figura 2.26b), foram realizados aumentando as dimensões da viga e coluna, ocasionando um aumento considerável de rigidez à rotação para a conexão.

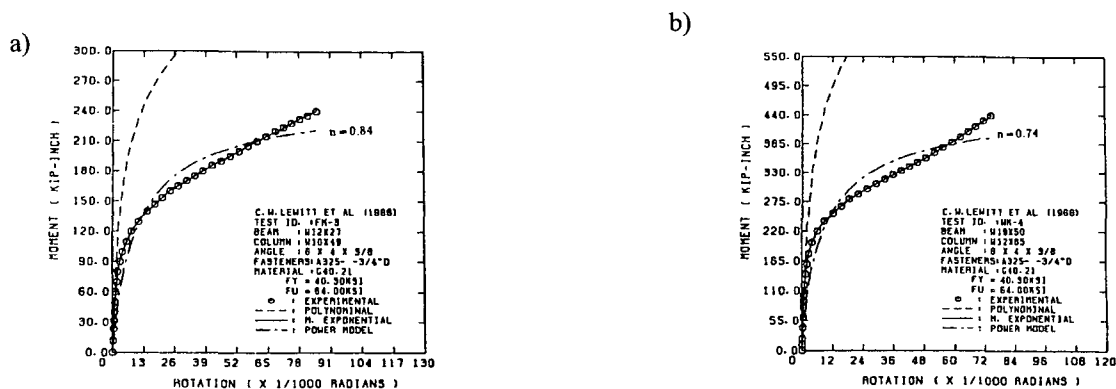


FIGURA 2.26 – Comparação das curvas M-θ para a conexão “Double Web-Angle”, retirado de Kirby et al. (1990).

Conexão típica “Top and Seat-Angle Connections”.

Rigidez Inicial da Conexão:

Para o cálculo destas conexões, adotam-se as seguintes suposições:

1. a cantoneira inferior transmite somente reação vertical e não fornece qualquer restrição à viga;
2. a cantoneira superior está proporcionando somente estabilidade lateral para a viga e não considera a resistência de cargas gravitacionais

Porém, de acordo com resultados experimentais fornecido por Hechtman et al (1947), Altman et al. (1982) e Azizinamini et al. (1985), constata-se que este tipo de conexão rotaciona na seção crítica da cantoneira inferior, e que a cantoneira superior fornece resistência às forças de extremidade no final da viga.

Para determinar a rigidez inicial da conexão, baseada nas condições mencionadas, assume-se que a conexão se comporta da seguinte maneira (Chen and Kishi 1987):

1. o centro da rotação da conexão se localiza na perna adjacente de compressão da mesa da viga na sua extremidade (ponto C da figura 2.27a).
2. a cantoneira superior age como uma viga cantilever, em que o apoio fixo é assumido estar na proximidade da borda do furo do fixador, perto da mesa da viga, na perna adjacente da face da coluna, ver figura 2.27b.
3. o momento resistente do centro da rotação é tão pequeno que pode ser desprezado;

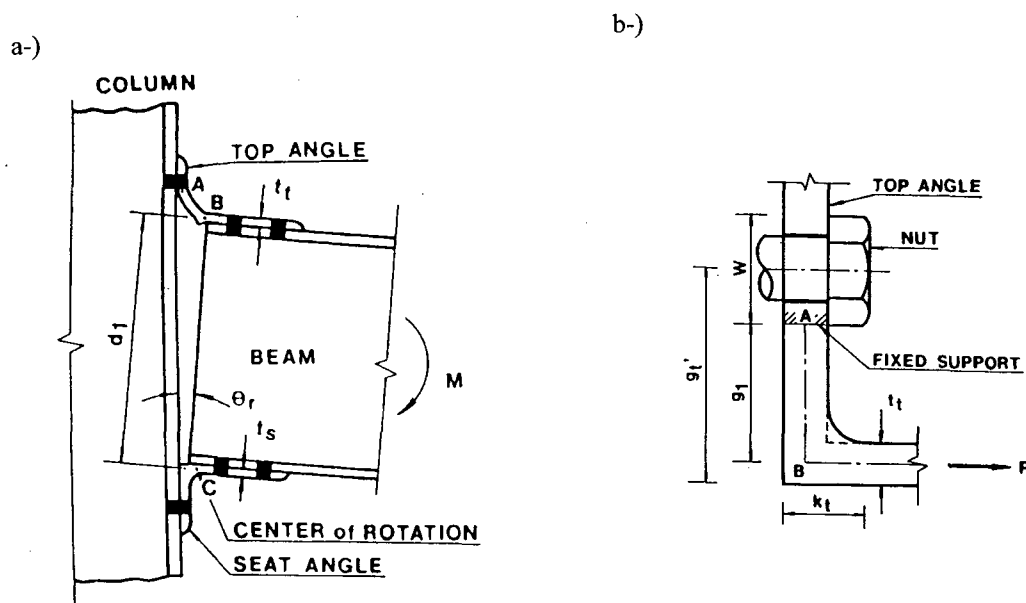


FIGURA 2.27 – Configuração de deflexão de uma ligação típica “Top and Seat Angles” para a condição elástica e um modelo de viga cantilever para o estado último, retirado de Kirby et al.(1990).

Capacidade do Momento Último:

De acordo com testes experimentais fornecidos por Altman et al. (1982), assume-se o mecanismo de colapso para a conexão com cantoneiras inferior e superior à viga. Uma vez que a distância entre duas rótulas plásticas é pequena, comparada com a espessura da cantoneira superior, deve-se levar em conta o efeito da força cortante na plastificação do material.

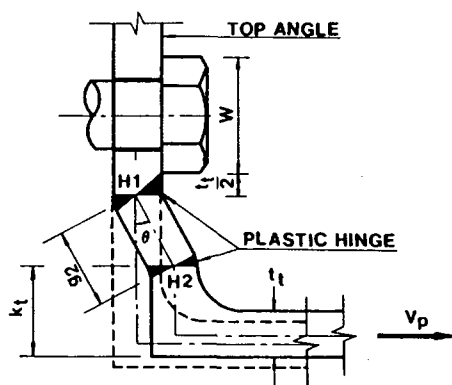


FIGURA 2.28 – Mecanismo do estado limite último para a conexão “Top Angle”, retirado de Kirby et al.(1990).

Curvas momento-rotação:

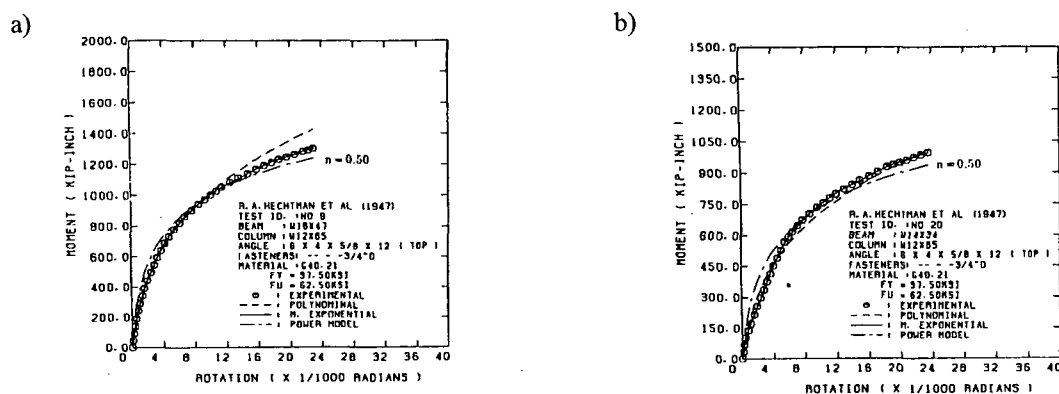


FIGURA 2.29 – Comparação das curvas M- θ para a conexão “Top-and Seat-Angle”, retirado de Kirby et al. (1990).

Para este tipo de conexão, os modelos apresentam uma precisão satisfatória aos resultados experimentais. As dimensões dos elementos de conexões foram alteradas nos dois testes da figura 2.29. Observa-se na figura 2.29a que a rigidez à rotação da conexão é superior por apresentar elementos mais espessos.

“Top- and Seat-Angle Connections with Double Web Angle”:

Rigidez Inicial da conexão:

Este tipo de ligação apresenta uma característica bastante peculiar devido à capacidade natural de ductilidade pela deformação por flexão, tanto na mesa quanto na alma das cantoneiras nas pernas atingidas pela coluna.

Tomando por base os resultados de Altman et al. (1982) e Azizinamini et al. (1985), tem-se a configuração deformada da ligação mostrada na figura 2.30a.

Para a avaliação da rigidez inicial da conexão, apresenta-se a conexão modelada como segue:

1. a viga e a perna adjacente da cantoneira na viga agem como membros rígidos;
2. o centro de rotação para a conexão está localizado na perna adjacente da cantoneira na compressão da mesa da viga;
3. a cantoneira superior age como uma viga cantilever, similar a conexão com cantoneiras superior e inferior, conforme figura 2.24b;
4. a cantoneira na alma age como uma viga cantilever, similar ao comportamento da cantoneira superior, fig. 2.30b;
5. o momento resistente no centro da rotação é desprezado.

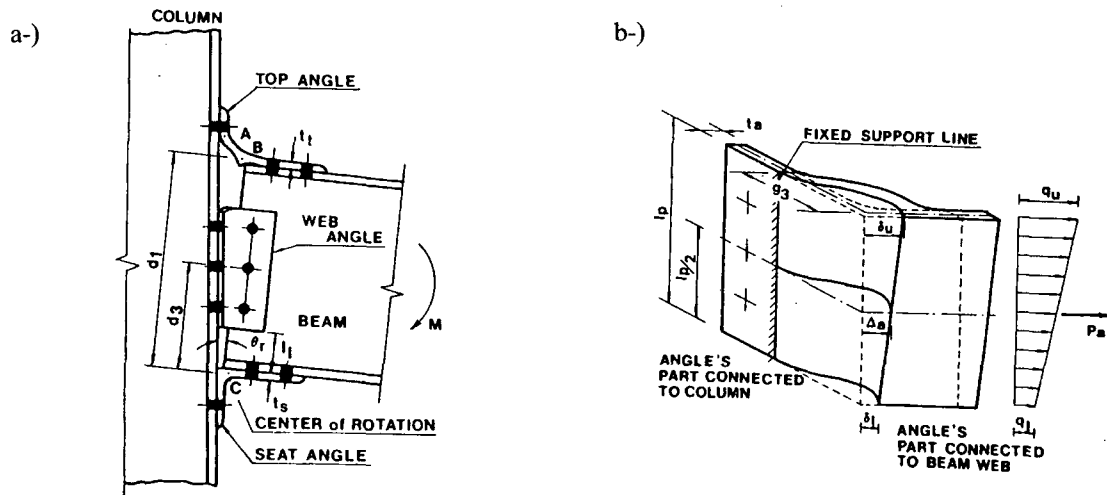


FIGURA 2.30 – Configuração de deformação das cantoneiras conectadas na viga e coluna no regime elástico e a configuração deformada do modelo de cantilever para a conexão “Web Angle”, retirado de Kirby et al.(1990).

Capacidade do Momento Último:

Conforme os resultados de testes experimentais realizados por Altman et al. (1982) e Aziziminamini et al. (1985), assume-se que o mecanismo de colapso das partes da conexão para cantoneiras superiores e inferiores e a cantoneira na viga é o mesmo já citado anteriormente.

Curvas momento-rotação:

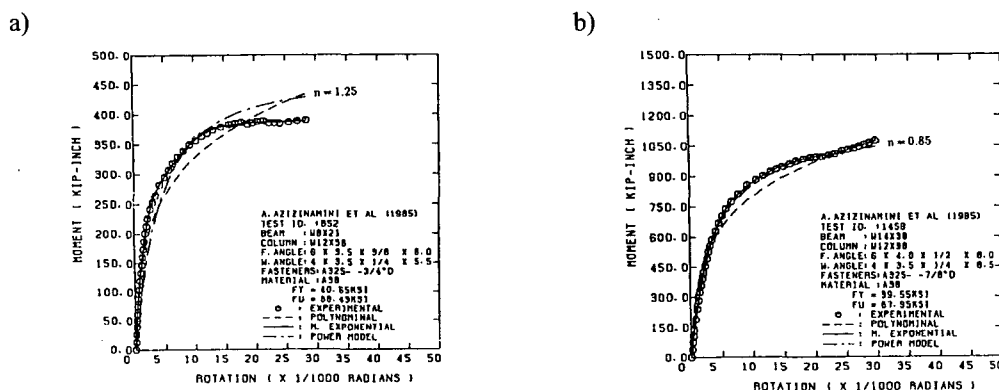


FIGURA 2.31 – Comparação das curvas M- θ para a conexão “Top-and Seat-Angle with Double Web-Angle”, retirado de Kirby et al. (1990).

Para a figura 2.31b, utilizaram-se vigas, colunas e conectores com dimensões superiores ao da figura 2.31a. Nota-se claramente na figura 2.31a um definido patamar de escoamento, devido à sua maior capacidade de redistribuição dos esforços.

Os modelos numéricos representam, de uma forma geral, comportamento adequado em relação ao ensaio experimental da conexão.

2.2.3) Ackroyd et al. (1981) apresentam um estudo associando a resistência e a rigidez da conexão, baseado em ensaios experimentais de ligações típicas entre viga-pilar para a determinação da rigidez da ligação à flexão a ser usada na análise.

Para um momento resistente da conexão idealizado, a capacidade do momento último é aproximadamente:

$$M_u \approx A \cdot F_y \cdot d \quad (2.2.1)$$

onde:

A = área efetiva da seção transversal para cada mesa da viga;

F_y = resistência de plastificação da conexão;

d = espessura da viga;

A rigidez da conexão é proporcional à área, A, e ao quadrado da espessura:

$$k \approx 2A \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{Ad^2}{2} \quad (2.2.2)$$

Isolando a área da seção transversal, A, nas duas equações, têm-se:

$$A = \frac{M_u}{F_y \cdot d} \quad (2.2.3)$$

$$A = \frac{2 \cdot k}{d^2} \quad (2.2.4)$$

Igualando os termos, elimina-se a área da seção A, e obtém-se:

$$k \propto \frac{M_u \cdot d}{F_y} \quad (2.2.5)$$

Portanto, a eq.(2.2.5) mostra a relação existente entre a resistência, M_u , e a rigidez, k, da conexão.

A figura abaixo relata o comportamento desta relação, eq. (2.2.5), deduzida de resultados experimentais disponíveis para os vários tipos de ligações.

A idéia do gráfico se baseia na determinação da rigidez para o tipo de ligação viga-pilar metálica.

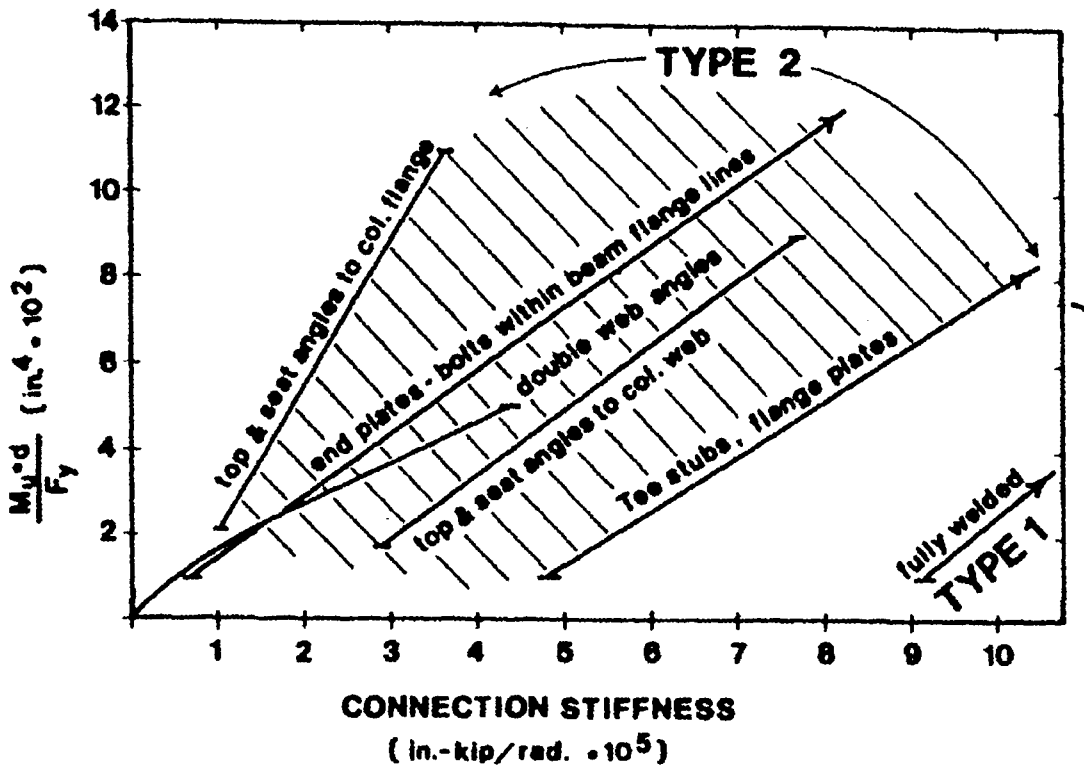


FIGURA 2.32 – Tipos das conexões flexíveis viga-pilar pela rigidez da conexão, retirado de Ackroyd et al. (1981).

Dada a especificação da resistência da plastificação do aço utilizado, a espessura da viga e a capacidade do momento último, figura 2.32, pode-se retirar do gráfico o valor correspondente da rigidez da conexão da flexão para as usuais ligações existentes entre viga-pilar. Este último parâmetro, capacidade do momento último, pode ser determinado pelos momentos finais da viga por análises de primeira ordem, multiplicado pelo fator apropriado de segurança 1.5 (este fator é consistente com a proporcionalidade entre momentos de cálculo das conexões por métodos de cálculo convencionais e momentos últimos obtidos por experimento).

Suposição utilizada inicialmente:

- Para a maioria dos tipos usuais de conexão flexível, a rigidez elástica inicial pode ser obtida independentemente das dimensões e materiais utilizados na conexão;

Em estudos experimentais realizados por Ackroyd et al. (1981), foram obtidos valores para a rigidez à rotação da conexão estabelecendo parâmetros para os três modelos de conexão: rígida, semi-rígida e articulada.

Para a maioria dos graus de flexibilidade das conexões, a rigidez elástica inicial pode ser utilizada para todas as dimensões das conexões e materiais conectados, segundo Ackroyd et al. (1981). Resultados de testes de várias conexões avaliadas em

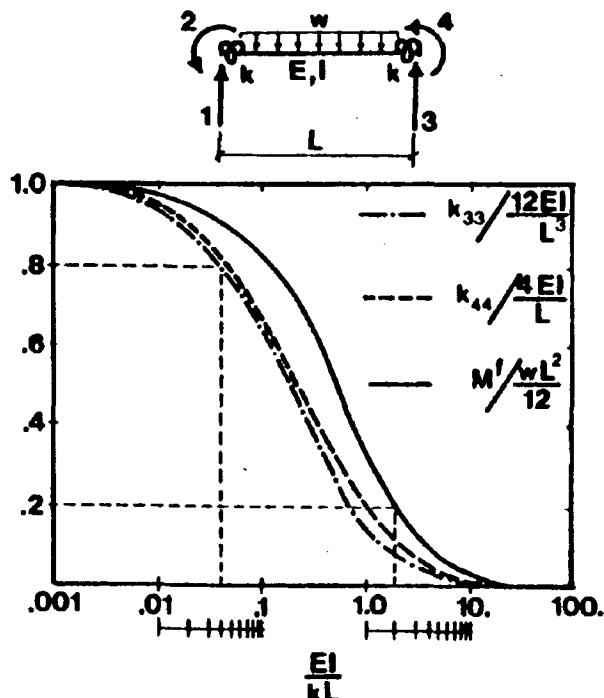
literatura relatam que as inclinações iniciais do diagrama momento-rotação podem variar aproximadamente de $6,78.10^7$ kN.m/rad para ligações inteiramente soldadas, variando bastante para as outros tipos de ligações correntes, podendo atingir valores irrisórios para as ligações por cantoneiras na alma do pilar.

A seguir são apresentados ensaios experimentais com valores do coeficiente de rigidez à rotação para a classificação de cada tipo de conexão, rígida, semi-rígida e flexível.

Segundo Ackroyd et al. (1981), os efeitos da flexibilidade são convenientemente expressados como uma uma função da razão da rigidez rotacional da viga, EI/L , e o módulo da conexão, k : EI/kL .

A figura 2.32 plota para uma viga prismática engastada, sob carregamento uniformemente distribuído, a razão dos momentos para a viga com conexões flexíveis (elementos de viga com molas em suas extremidades) e conexões rígidas, localizada na ordenada do gráfico, versus o log da razão de rigidez, EI/kL , situado na abcissa.

As constantes adimensionais situadas na ordenada, M_{flex}/M_{rig} , para vigas, variam



de zero, para conexões articuladas, e a unidade, para conexões rígidas.

FIGURA 2.33 - Relação da resistência versus a rigidez das conexões viga-coluna, retirado de Ackroyd et al. (1981).

Para a rigidez rotacional da conexão $EI/kL > 0.05$, os momentos adimensionais estarão na faixa dos 80% dos seus valores, dentro do intervalo para ligações rígidas, podendo, em consequência, desconsiderar a flexibilidade da conexão.

Para a rigidez rotacional da conexão $EI/kL > 2.0$, os valores adimensionais estarão próximos de zero, assim a condição articulada pode ser assumida.

Segue que os efeitos da flexibilidade da conexão podem ser considerados para os casos onde a rigidez rotacional da conexão apresente o seguinte intervalo:

$$0.05 < EI/kL < 2.0 \quad (2.2.6)$$

Uma revisão dos tipos usuais das ligações metálicas indica que o intervalo dos valores da rigidez rotacional da viga, EI/L , é de 5.65×10^3 a 1.13×10^4 kN.m/rad.

Em termos de rigidez, Ackroyd et al (1981) classifica os modelos de conexão viga-pilar em dois tipos:

1. Estruturas do tipo 1, representadas por ligações rígidas entre os membros conectados. Normalmente, utilizam a solda como meio de ligação, apresentando o seguinte intervalo dos valores dos coeficientes de rigidez: 1.13×10^5 a 5.65×10^6 kN.m/rad.
2. Estruturas do tipo 2, que englobam as ligações parcialmente restringidas nas suas conexões. Normalmente, utilizam parafusos para sua fixação, sendo encontrado o seguinte intervalo: 2.26×10^4 a 1.13×10^5 kN.m/rad.

Os valores dos intervalos transformados para razões de rigidezes rotacionais da conexão, obtêm-se:

Estruturas metálicas com ligações do tipo 1 : $0.02 < EI/kL < 0.1$ e

Estruturas metálicas com ligações do tipo 2 : $0.05 < EI/kL < 0.5$

Os valores das rigidezes rotacionais adimensionais da conexão, EI/kL , mostrados acima, fornecem um útil e simples critério de classificação do modelo de classificação da conexão viga-pilar.

2.2.4) De acordo com Tan et al. (1996), analisou-se experimentalmente um modelo de conexão viga-pilar, utilizando um arranjo tipo cantilever para uma representação aproximada de uma estrutura de dois andares e uma linha de viga . O intuito do estudo era examinar o comportamento da conexão, e avaliar o seu diagrama momento-rotação.

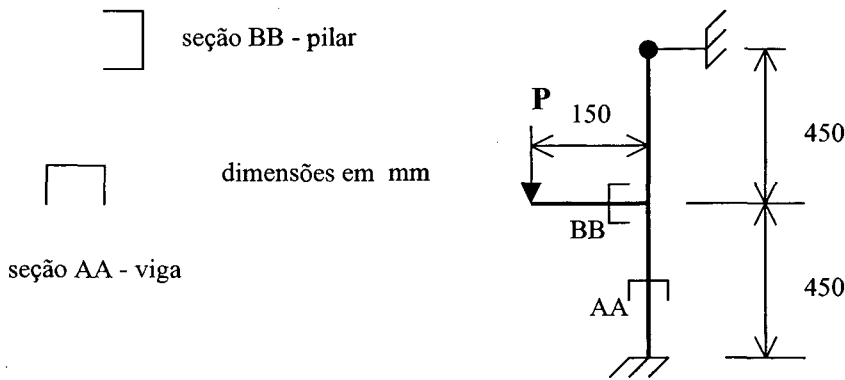


FIGURA 2.34 – Característica do tipo de arranjo viga-pilar testado.

A seguir, estão detalhadas as características do ensaio realizado:

- ✓ O apoio de base da coluna é engastado, enquanto o seu apoio de topo é disposto de tal forma a impedir o deslocamento lateral.
- ✓ A viga e a coluna apresentam as mesmas seções transversais e o conector apresenta as dimensões previamente bem definidas, variando nos experimentos somente a espessura do membro e do conector.
- ✓ As cargas na viga foram incrementadas e a variação carga-deformação foi anotada. Quando as deflexões se tornavam não-lineares, a parcela de carga era reduzida para assegurar que a não-linearidade pudesse ser obtida corretamente.
- ✓ O modelo era solicitado até a ruína. Para cada teste efetuado, a viga, coluna e conexão eram substituídos.

Na figura 2.35 está ilustrada a comparação no gráfico carga-deflexão do comportamento da conexão, segundo a teoria dos nós rígidos com o da curva experimental. Na análise dos nós rígidos, existe uma relação linear e proporcional entre carga e deslocamento para cada incremento de carga. Não ocorre o mesmo na curva experimental, onde a perda de rigidez é crescente e desproporcional a cada incremento de carga aplicado. A não-linearidade, física e a geométrica, da curva experimental é devido ao comportamento da conexão e aos deslocamentos sofridos pela viga e pilar, respectivamente.

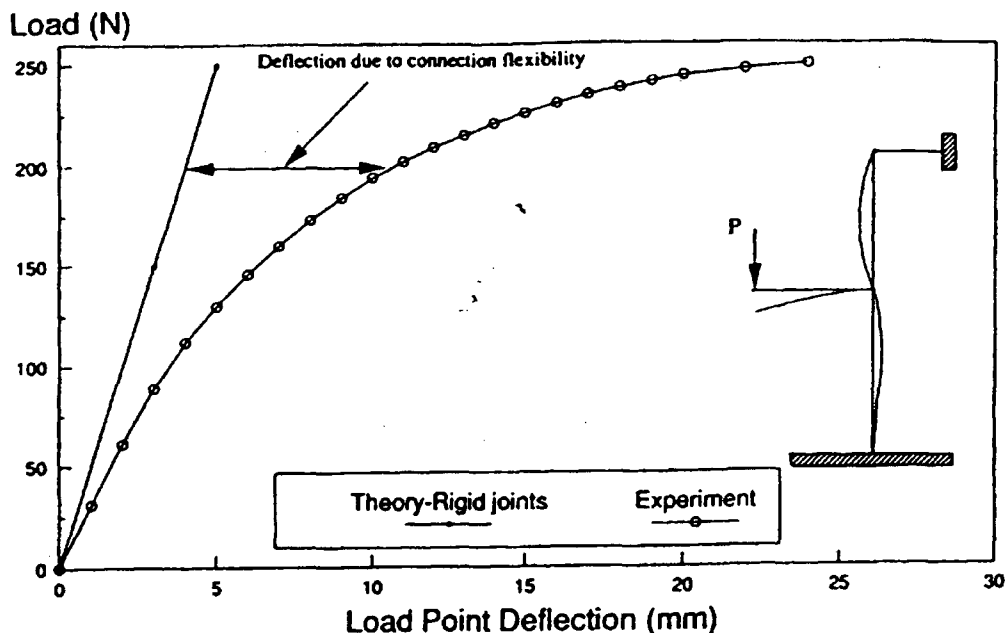


FIGURA 2.35 – Avaliação da carga-deflexão da conexão, retirado de Tan et al. (1996).

Resultados e Observações encontrados no experimento:

Vários testes foram realizados, variando as espessuras dos conectores e dos membros.

As seguintes conclusões foram observadas:

1. como esperado, a rigidez da conexão é diretamente proporcional à espessura da conexão, principalmente devido ao aumento da rigidez à flexão da conexão;
2. os resultados comprovam que as relações momento-rotação de todas as conexões são não-lineares;

Os resultados dos testes das conexões foram anotados, especificando: as dimensões das espessuras dos membros e conectores, a carga de ruína P , o local onde ocorreu o estado limite último da estrutura e a ocorrência de distorção ou não dos membros interconectados para cada ensaio realizado.

Observações importantes em relação à ruína da peça foram destacadas. São elas:

1. Se a ruína é devido à plasticidade da conexão, não há distorção dos membros;
2. Quando a ruína é concentrada na viga, ocorre sempre alguma distorção no elemento-coluna. Verifica-se que a rótula plástica se forma na borda da conexão, parte comprimida onde a tensão é maior. Significativa distorção também é observada na proximidade do parafuso, especialmente na área próxima à coluna.
3. Para os casos onde a ruína da estrutura é ocasionada pela combinação da viga e da conexão, a plasticidade ocorrerá de acordo com as resistências relativas de cada

elemento. Mesmo que o estado de ruína da estrutura seja determinado pela plasticidade da conexão, a viga continuará a apresentar deformação local.

2.2.5) Até o presente momento, é grande a preocupação dos pesquisadores na avaliação do comportamento das conexões através da relação momento-rotação. Conforme visto, existem diversos estudos que tentam simular e ajustar resultados experimentais a métodos analíticos. No estudo de Estrin (1991), o caminho adotado foi o inverso, partiu-se primeiro de uma teoria matemática antiga e simples para uma comprovação final por meio de testes experimentais.

A idéia da teoria “Beam-Line” demonstrada por Batho está baseada num método gráfico para a determinação do momento e a sua respectiva rotação para o nível de solicitação apresentado. É representada pela equação de uma reta determinada por dois pontos num diagrama momento-rotação. Um ponto está situado no eixo da ordenadas representado pelo momento fletor, M_0 , sendo o outro localizado no eixo das abcissas, rotação (θ_0). Fisicamente, o momento fletor M_0 se refere ao momento de extremidade de uma coluna para o nó rígido enquanto a rotação θ_0 representa uma viga livre para girar. Ligando os dois pontos tem-se uma reta que é chamada de “viga-linha”. Dada a relação momento-rotação de uma conexão qualquer, o ponto de interseção do comportamento da conexão pela equação de uma reta determinada para o tipo de carregamento e comprimento do membro L , representa o momento e sua respectiva rotação a que a conexão está sujeita.

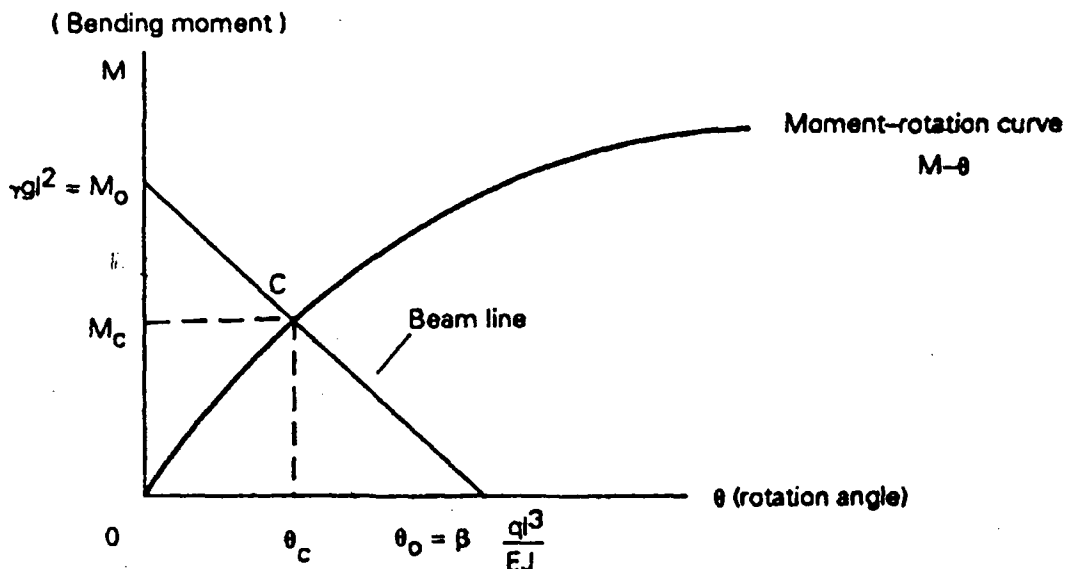


FIGURA 2.36 – Diagrama de Batho, Beam-line, onde M_c é o valor desconhecido, retirado de Estrin (1991).

Portanto, o problema é voltado novamente na determinação da curva momento-rotação a ser utilizada para a conexão no processo de cálculo.

No artigo citado, Estrin (op.cit) verificou através de ensaios experimentais que equações parabólicas (cúbicas e quadradas), quase sempre correspondem adequadamente à curva não-linear da conexão. O estudo analítico foi realizado resolvendo as equações parabólicas em termos da “beam line”, utilizando-se de dois coeficientes adimensionais que relacionam o momento fletor e a rotação da conexão.

Estrin (op.cit) apresentou, através de uma tabela, vários tipos de conexão metálica viga-pilar com seus respectivos coeficientes adimensionais, em função da geometria e da utilização de enrijecedores, tecendo comentários e observações.

O método apresentado se caracteriza por um processo de cálculo simples, objetivo e de fácil aplicação em projeto, representando satisfatoriamente o comportamento da conexão.

Conforme se verifica nos exemplos apresentados e na literatura existente há uma grande preocupação dos pesquisadores em representar adequadamente a flexibilidade da conexão viga-pilar através de modelos numéricos.

Em razão de os inúmeros estudos e experimentos, já elaborados, não terem obtido resultados suficientemente satisfatórios, pesquisas continuam sendo desenvolvidas em larga escala visando métodos de cálculo que possibilitem a sua adequada aplicabilidade.

Quanto à bibliografia existente, há disposição de regras gerais, de fundamental importância, que devem ser levadas em consideração na aplicação das ligações metálicas entre viga-pilar de projetos estruturais.

Assim sendo, este capítulo tem por objetivo demonstrar através dos resultados experimentais a existência e a caracterização do fenômeno, levantando algumas observações e conclusões, apresentando subsídios e parâmetros, a fim de possibilitar uma maior margem de segurança na elaboração dos projetos estruturais.

3 – ANÁLISE NUMÉRICA

Com o intuito de apresentar uma formulação simples, prática e precisa da análise semi-rígida das ligações entre viga-pilar, utilizou-se a análise matricial das estruturas pelo método da rigidez, de tal forma que os estágios de cálculo fossem desenvolvidos de forma padronizada para facilitar a implementação em programas computacionais.

Há dois tipos de concepções para o elemento de conexão na utilização de uma análise matricial das estruturas. Um deles representa o elemento com “molas”, incorporado nas extremidades e o outro interpreta o elemento mola agindo independentemente na ligação viga-pilar. Na formulação aqui apresentada é utilizado o elemento com “molas” nas extremidades.

O comportamento à flexão da conexão é caracterizado por uma curva momento-rotação, que representa o momento transmitido pela conexão para a rotação relativa dos membros interceptados. Constatase, por ensaios experimentais, que esse diagrama apresenta um caráter não-linear. A rigidez da conexão é representada como a inclinação desta curva em qualquer ponto. Para incluir na análise o comportamento não-linear do diagrama momento-rotação, é necessária a utilização de um processo iterativo.

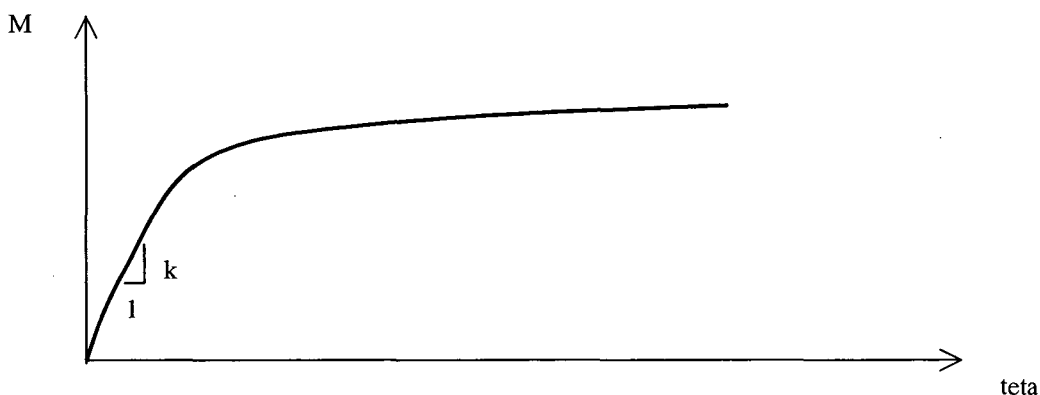


FIGURA 3.1 - Reação não-linear da relação momento-rotação da conexão.

O método iterativo secante, onde se obtém uma rigidez fictícia para o nível de momento em estudo, será utilizado para representar a flexibilidade da conexão.

Caracteriza-se por apresentar uma fácil implementação em programas computacionais, pois trata-se de uma simples repetição da análise de primeira ordem.

A idéia deste capítulo é apresentar inicialmente um embasamento teórico do modelo de pórtico plano pela análise matricial de estruturas, pelo método da rigidez. Em seguida, mostrar a influência do fenômeno semi-rígido da conexão pela modificação da matriz de rigidez do elemento e do vetor de engastamento perfeito, culminando numa análise elasto-plástica da conexão, através do processo iterativo secante.

3.1 - MODELO DE PÓRTICO PLANO

A estrutura representada por um pórtico plano apresenta certas características e propriedades específicas na sua análise.

Os elementos que constituem a estrutura são presentes em um único plano, tendo eixos de simetria nesse plano, segundo Gere et al. (1987).

As forças atuantes no pórtico plano, bem como os seus deslocamentos, estão no mesmo plano da estrutura. Os momentos que atuam no pórtico plano apresentam seus vetores-momento normais ao plano.

Os nós, que são definidos como o encontro de duas ou mais barras da estrutura, são considerados, geralmente, como ligações rígidas.

Os esforços internos resultantes em qualquer seção de um elemento de um pórtico plano podem consistir, em geral, em um momento fletor, uma força cortante e uma força axial.

As deformações de pórtico plano são por flexão e axiais. Normalmente, para o caso de elementos esbeltos e não triangulados, as deformações por flexão são muito mais importantes sobre as deformações axiais. Caso haja alguma dúvida na análise a cerca de sua importância relativa, é necessário incluir o efeito axial. (Gere & Weaver, 1987)

Como todas as forças são atuantes no plano e os binários perpendiculares ao plano, as barras só sofrerão deformações no plano considerado e não haverá torção. Admite-se, neste caso, que o eixo x coincide com o eixo longitudinal das barras e o eixo vertical y é um eixo principal da seção transversal e deve ser um *eixo de simetria*, conseqüentemente o centróide da seção coincide como centro de torção da seção. (notas de aula de La Rovere, 1998).

As estruturas aqui determinadas são consideradas reticuladas, membros com uma dimensão predominante sobre as dimensões da seção transversal, e seus membros são prismáticos, isto é, cada membro tem um eixo reto e uma seção transversal constante ao longo do comprimento. Assim, para o caso de elementos longos, desprezam-se as deformações por cortantes. Segundo a Teoria de Bernouilli, a relação l/h for considerável, as seções planas permanecem planas e normal à linha neutra.

As estruturas são consideradas linearmente elásticas, isto é, relações lineares entre as ações e os deslocamentos. Isto só será possível caso sejam respeitadas as seguintes condições:

- o material utilizado segue a Lei de Hooke; ($\sigma = E \cdot \varepsilon$);
- os deslocamentos da estrutura são pequenos;
- não existe interação entre os efeitos axial e fletor nos membros.

Portanto, os efeitos das deformações por flexão e axial combinados, efeitos de 2ª ordem – não linearidade geométrica, não farão parte da análise apresentada. Os esforços axiais e de flexão são considerados independentes, proporcionando a utilização de um dos conceitos mais importantes da análise estrutural, ou seja, Princípio da Superposição dos Efeitos. Em termos gerais, o princípio estabelece que os efeitos produzidos por várias causas podem ser obtidos combinando os efeitos devidos às causas individuais.

As ações e deslocamentos ocorridos na estrutura serão calculados nos nós que, ligados, compõem os elementos da estrutura. A resolução da estrutura é feita por um sistema de equações algébricas através de uma formulação matricial.

As relações existentes entre as ações e deslocamentos na análise estrutural pelos métodos de análise matricial podem ser representadas através de um exemplo simples de uma mola linearmente elástica inextensível, fixa na extremidade esquerda, conforme figura abaixo:

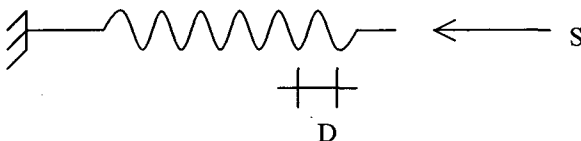


FIGURA 3.2 – Mola elástica inextensível, engastada à esquerda e solicitada por uma força axial.

Pela ação do esforço S na mola, será produzido um deslocamento D na extremidade livre da mola. A relação entre a ação S e o deslocamento D da mola pode ser representada pela seguinte relação:

$$S = k * D \quad (3.1.1)$$

Relata a relação entre a força e o deslocamento através de uma *equação de ação*.

Nesta equação, k representa a rigidez da mola, sendo definida como numericamente igual à ação necessária para produzir um deslocamento unitário. O valor de k é inversamente proporcional aos deslocamentos D da estrutura.

Outro tipo de interpretação do fenômeno da deformação da mola expressa a relação entre a força e o deslocamento através de uma *equação do deslocamento*:

$$D = F * S \quad (3.1.2)$$

onde F representa a flexibilidade da mola, sendo definida como numericamente igual ao deslocamento produzido por um valor unitário da ação S . Quanto maior o valor de F , mais flexível se torna a estrutura.

Constata-se, pelas equações apresentadas, que a rigidez e a flexibilidade da mola são inversamente proporcionais uma da outra, como se segue:

$$F = \frac{1}{k} = k^{-1} \quad \therefore \quad S = \frac{1}{F} = F^{-1} \quad (3.1.3)$$

A dimensão da flexibilidade da mola é expressa em unidades de comprimento por unidade de força:

$$\dim[F] = \frac{\dim[L]}{\dim[S]} \quad (3.1.4)$$

enquanto a dimensão da rigidez da mola é expressa em unidades de força por unidade de comprimento:

$$\dim[k] = \frac{\dim[S]}{\dim[L]} \quad (3.1.5)$$

3.1.1 Características dos métodos de análise estrutural

A formulação matricial é bastante difundida e utilizada por tratar o problema de uma forma padronizada, tratando todas as estruturas da mesma forma com procedimentos de cálculo definidos, passo a passo, proporcionando ferramentas para a

análise computacional de forma a organizar e otimizar todas as etapas de cálculo da estrutura.

Na análise estrutural, utilizando uma formulação matricial existem duas teorias fundamentais e universais: método da flexibilidade e método da rigidez.

Propriedades do Método da Flexibilidade:

- ✓ neste método, determinam-se diretamente os esforços e, a partir destes, os deslocamentos;
- ✓ pode ser utilizado para determinar qualquer tipo de estrutura hiperestática;
- ✓ a estrutura é resolvida através de liberações ou cortes para se obter a isostática fundamental – que se denomina sistema principal;
- ✓ o sistema de equações algébricas a ser utilizado é constituído por equações de compatibilidade dos deslocamentos, onde as incógnitas, a serem resolvidas no sistema, são as forças nas liberações ou cortes;
- ✓ o número de equações, a ser resolvido no método, é determinado pelo grau de hiperestaticidade da estrutura;
- ✓ existe uma infinidade de sistemas principais a serem escolhidas para analisar uma estrutura. A escolha do sistema mais conveniente depende da experiência do analista.

Propriedades do Método da Rigidez:

- ✓ neste método, inicialmente, são determinados os deslocamentos e indiretamente os esforços solicitantes na estrutura;
- ✓ pode ser utilizado para calcular qualquer tipo de estrutura isostática e hiperestática. A exceção é feita para uma única barra bi-engastada;
- ✓ a isostática fundamental é definida através da fixação de todos os graus de liberdade da estrutura;
- ✓ o sistema de equações matriciais, que resolve a estrutura, é formado por equações de equilíbrio dos graus de liberdade de cada nó da estrutura, onde as incógnitas a serem encontradas são os deslocamentos respectivos às fixações;
- ✓ o número de equações a ser determinado no sistema é igual ao número de graus de liberdade da estrutura;
- ✓ existe somente um único sistema principal a ser adotado para a resolução da estrutura, que é caracterizado pela imobilização de todos os deslocamentos possíveis dos nós.

A principal diferença entre os métodos de análise matricial reside na escolha da isostática fundamental da estrutura. Com a implementação computacional, o método da rigidez proporciona uma resolução padronizada, não sendo mais necessária a escolha do sistema principal pelo usuário nas etapas de cálculo da estrutura.

Portanto, é proposta uma análise matricial pelo método da rigidez aplicada a pórticos planos.

É apresentada a seguinte convenção de sinais positivos para o sentido dos deslocamentos e esforços no método da rigidez:

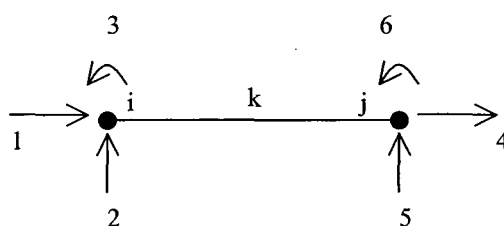


FIGURA 3.3 – Convenção dos sinais positivos para os graus de liberdade.

O número de equações algébricas a ser determinado corresponde ao número de nós, n , vezes o número de graus de liberdade, m , da estrutura. Algebricamente, tem-se:

$$\text{número de equações} = n \times m.$$

A equação de equilíbrio dos graus de liberdade livres de cada nó da estrutura, a ser resolvida pelo método da rigidez, é mostrada abaixo:

$$\{ F \}_L = [k]_{LL} * \{ \partial \}_L \quad (3.1.6)$$

No Método da Rigidez, calcula-se primeiro os deslocamentos da estrutura referentes aos graus de liberdade de cada nó. Isolando os deslocamentos, ∂ , na eq.(3.1.6):

$$\{ \partial \}_L = [k]_{LL}^{-1} * \{ F \}_L \quad (3.1.7)$$

onde estas grandezas são assim definidas:

$\{ \partial \}_L$ – é o vetor dos deslocamentos nodais da parte livre da estrutura;

$[k]_{LL}$ – é a matriz de rigidez da estrutura restringida;

$[k]_{LL}^{-1}$ – é a inversa da matriz de rigidez da estrutura restringida;

$\{ F \}_L$ – é o vetor dos esforços nodais da estrutura;

A seguir, estão apresentados os passos do desenvolvimento das grandezas representadas na equação algébrica.

Inicialmente, parte-se da matriz de rigidez para cada elemento de barra do pórtico plano individualmente.

Cada nó do elemento de pórtico plano apresenta três graus de liberdade: deslocamento axial, cortante e momento fletor.

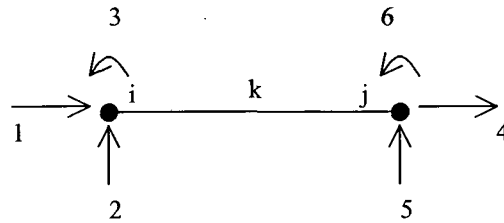


FIGURA 3.4 – Identificação dos graus de liberdade de um elemento de pórtico plano

A matriz de rigidez do elemento no sistema local é formada a partir de quatro submatrizes:

$$[\underline{r}] = \begin{bmatrix} [r_{ii}] & [r_{ij}] \\ [r_{ji}] & [r_{jj}] \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

Os índices das submatrizes correspondem às extremidades da barra. Cada submatriz é da ordem 3 x 3, sendo assim denominadas:

Esforço na extremidade do primeiro índice devido a um deslocamento unitário na extremidade referente ao segundo índice.

Os coeficientes de rigidez que formam cada submatriz podem ser definidos através de um coeficiente genérico:

Coeficiente de rigidez genérico r_{12} : numericamente igual a ação generalizada na direção 1 devido a um deslocamento unitário na direção 2, sendo todos os outros deslocamentos nulos.

A seguir, está o procedimento de cálculo dos coeficientes que formam a matriz de rigidez de pórtico plano no sistema local, segundo Loriggio (1999).

$$1. \underline{d}'_1 = 1 : (\underline{d}'_2 \text{ a } \underline{d}'_6 = 0) \quad 4. \underline{d}'_4 = 1 : (\underline{d}'_1 \text{ a } \underline{d}'_3 = 0 \text{ e } \underline{d}'_5 \text{ a } \underline{d}'_6 = 0)$$

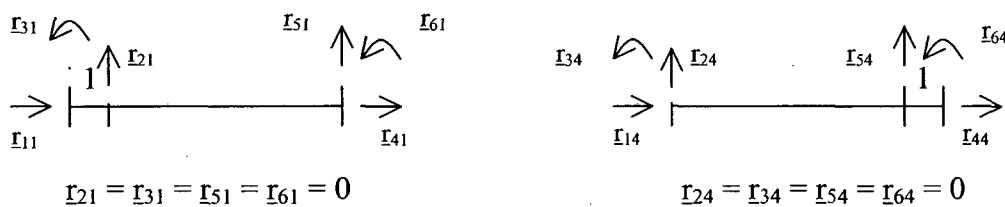


FIGURA 3.5 – Aplicação de um deslocamento unitário na direção axial, 1 e 4, e todos os outros deslocamentos nulos.

Para uma barra de comprimento L , módulo de elasticidade E e seção transversal A , comprimida axialmente por uma força N , surge um deslocamento axial ΔL , que, conforme a resistência dos materiais, tem-se :

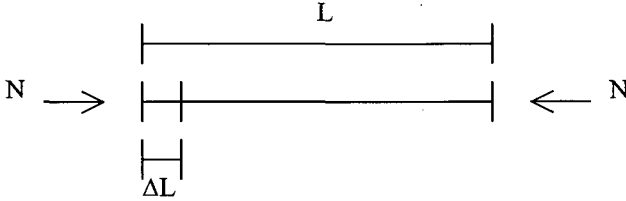


FIGURA 3.6 – Barra comprimida axialmente.

$\Delta L = \frac{N.L}{E.A}$ \therefore se $\Delta L = 1 \rightarrow N = \frac{E.A}{L}$, substituindo em termos dos coeficientes de rigidez, tem-se para $d'_1 = 1$:

$$r_{11} = \frac{E.A}{L} \quad \therefore \text{por equilíbrio } r_{41} = -\frac{E.A}{L} \quad (3.1.9)$$

Para a situação representada para $\underline{d}_4 = 1$, por analogia :

$$r_{14} = -\frac{E.A}{L} \quad \therefore \text{por equilíbrio } r_{44} = \frac{E.A}{L} \quad (3.1.10)$$

sendo os demais coeficientes nulos.

2. $d'_2 = 1$: ($d'_1 = 1$ e d'_3 a $d'_6 = 0$)

5. $d'_5 = 1$: (d'_1 a $d'_4 = 0$ e $d'_6 = 0$)

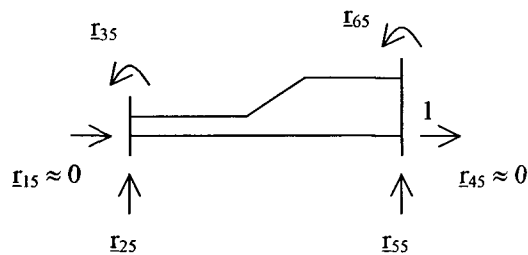
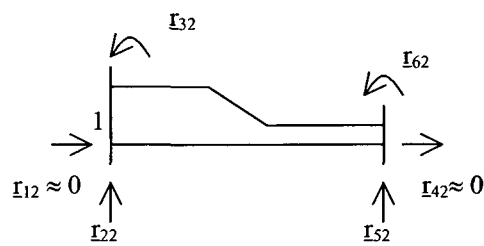


FIGURA 3.7 – Aplicação de um deslocamento unitário na direção 2 e 5, e todos os outros deslocamentos nulos.

Fixando todos os graus de liberdade da barra e aplicando um deslocamento unitário na direção do grau de liberdade 2, tem-se:

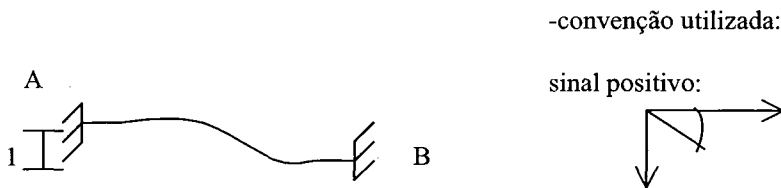


FIGURA 3.8 – Aplicação de um deslocamento unitário vertical na extremidade A da barra.

A isostática fundamental é obtida liberando os três graus de liberdade do engaste esquerdo da barra, surgindo três esforços solicitantes: momento fletor, força cortante e esforço normal.

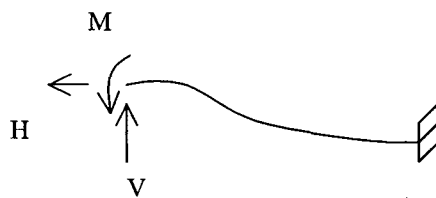


FIGURA 3.9 – Isostática Fundamental

As equações de compatibilidade dos deslocamentos da barra são:

- deslocamento vertical no ponto A: $\delta_A = -1$ e
- deslocamento rotacional no ponto A: $\varphi_A = 0$

A barra AB pode ser resolvida por vários processos, tais como:

- Tabelas;
- Integração direta;
- Princípio dos Trabalhos Virtuais;
- Analogia de Mohr.

Este último processo é utilizado para o cálculo auxiliar dos coeficientes de rigidez.

Uma análise superficial do método Analogia de Mohr, refere-se à aplicação das equações de equilíbrio diferenciais do cortante e do momento fletor, utilizando a equação diferencial da linha elástica, imaginando uma viga carregada com um carregamento fictício.

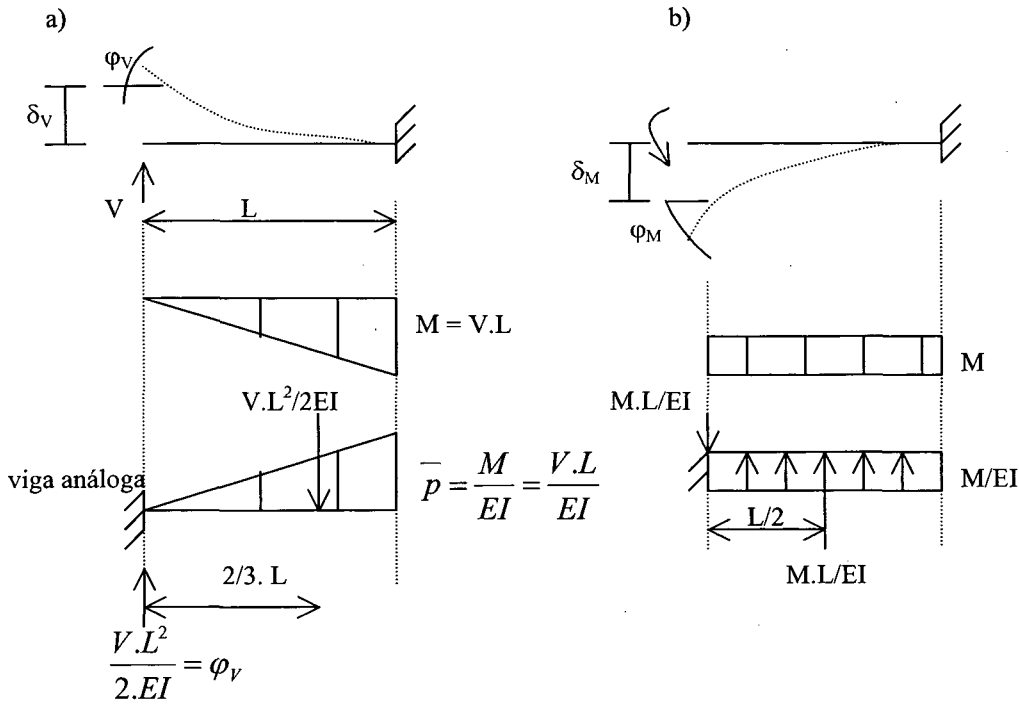


FIGURA 3.10 – Resolução da viga por analogia de Mohr.

Pelo método da Analogia de Mohr, os deslocamentos na viga real correspondem aos momentos na viga análoga com carregamento fictício e os ângulos na viga real correspondem aos esforços cortantes na viga análoga.

Para os deslocamentos devido à carga V , de acordo com a figura 3.1.10a, têm-se:

$$\begin{aligned} \bar{M} = \delta_v &= -\frac{V.L^2}{2EI} * \frac{2}{3}.L \quad \therefore \quad \delta_v = -\frac{V.L^3}{3.EI} \\ \bar{V} = \phi_v &= \frac{V.L^2}{2.EI} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Para os deslocamentos devido ao momento M , de acordo com a figura 3.1.10b, têm-se:

$$\begin{aligned} \phi_M &= -\frac{M.L}{EI} \\ \delta_M &= \frac{M.L^2}{EI} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Utilizando o princípio da superposição dos efeitos para as parcelas dos deslocamentos devido a carga V e momento M , nas equações de compatibilidade, obtêm-se:

$$1^a) \delta_A = -1 \quad \therefore \quad \delta_R + \delta_M = -1 \quad \therefore \quad -\frac{V.L^3}{3.EI} + \frac{M.L^2}{EI} = -1 \quad (3.1.13)$$

$$2^a) \varphi_A = 0 \quad \therefore \quad \varphi_R + \varphi_M = 0 \quad \therefore \quad \frac{V.L^2}{2.EI} - \frac{M.L}{EI} = 0 \quad \therefore \quad V = \frac{2.M}{L} \quad (3.1.14)$$

Substituindo a equação 2 em 1, isolando o momento M:

$$M = \frac{6.EI}{L^2} \quad (3.1.15)$$

$$V = \frac{2.M}{L} = \frac{12.EI}{L^3}$$

Os coeficientes de rigidez para $d'_2 = 1$, com seus respectivos graus de liberdade, são:

$$\begin{aligned} r_{22} &= \frac{12.EI}{L^3} \quad \therefore \quad r_{32} = \frac{6.EI}{L^2} \\ r_{52} &= -\frac{12.EI}{L^3} \quad \therefore \quad r_{62} = \frac{6.EI}{L^2} \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Por analogia, os coeficientes de rigidez para $d'_5 = 1$ são determinados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} r_{55} &= \frac{12.EI}{L^3} \quad \therefore \quad r_{35} = -\frac{6.EI}{L^2} \\ r_{25} &= -\frac{12.EI}{L^3} \quad \therefore \quad r_{65} = -\frac{6.EI}{L^2} \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

3. $d'_3 = 1$: (d'_1 e $d'_2 = 0$ e d'_4 a $d'_6 = 0$)

6. $d'_6 = 1$: (d'_1 a $d'_5 = 0$)

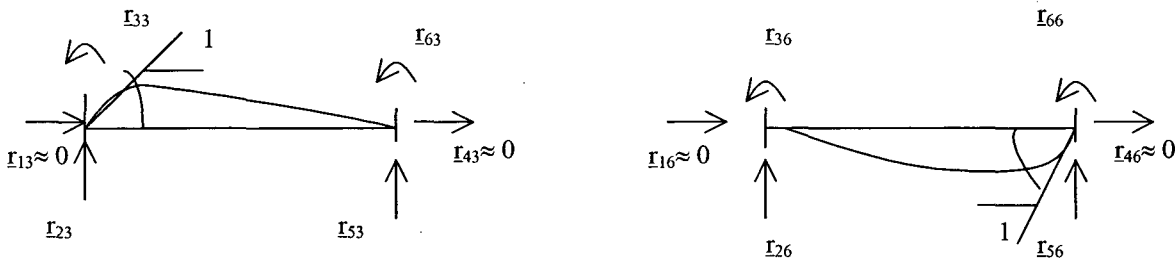


FIGURA 3.11 – Aplicação de um deslocamento unitário na direção 3 e 6, e todos os outros deslocamentos nulos.

Resolução da barra bi-engastada por uma barra fundamental, liberando os três graus de liberdade do engaste à esquerda, para um deslocamento unitário na direção do grau de liberdade três:

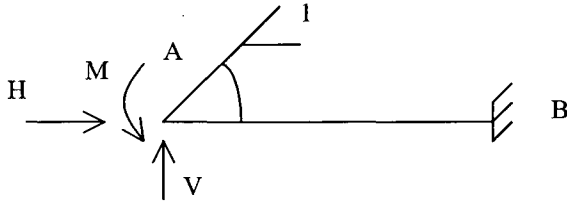


FIGURA 3.12 – Aplicação de uma rotação unitária na extremidade A da barra.

Aproveitando os mesmos resultados dos deslocamentos para o caso anterior e utilizando as seguintes equações de compatibilidade do elemento de barra abaixo, encontram-se os últimos coeficientes de rigidez no sistema local da barra de pórtico plano:

1ª equação de compatibilidade:

Rotação no ponto A:

$$\begin{aligned}\varphi_A &= -1 \\ \varphi_R + \varphi_M &= -1 \\ \frac{V.L^2}{2.EI} - \frac{M.L}{EI} &= -1\end{aligned}\quad (3.1.18)$$

2ª equação de compatibilidade:

Deslocamento vertical no ponto A:

$$\begin{aligned}\delta_A &= 0 \\ \delta_R + \delta_M &= 0 \\ -\frac{V.L^3}{3.EI} + \frac{M.L^2}{2.EI} &= 0 \quad \therefore \quad V = \frac{3}{2} * \frac{M}{L} \quad \therefore \quad \text{substituindo na equação 1, tem-se:} (3.1.19) \\ M &= \frac{4.EI}{L} \quad \therefore \quad \text{conseqüentemente, substituindo o momento na equação 2:} \\ V &= \frac{6.EI}{L^2}\end{aligned}$$

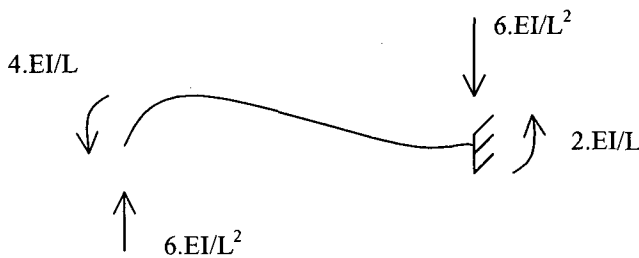


FIGURA 3.13 – Esforços encontrados devido a uma rotação unitária.

Observação: para o caso genérico da barra engastada e livre, o momento de engastamento vale a metade do momento aplicado na extremidade oposta.

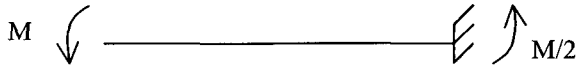


FIGURA 3.14 – Momentos atuantes nas extremidades livre e engastada de uma barra.

Os coeficientes de rigidez respectivos a estes deslocamentos são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned} r_{23} &= \frac{6.EI}{L^2} \quad \therefore \quad r_{33} = \frac{4.EI}{L} \\ r_{53} &= -\frac{6.EI}{L^2} \quad \therefore \quad r_{63} = \frac{2.EI}{L} \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Para o deslocamento unitário na direção do grau de liberdade de giro na extremidade oposta ($d'_6 = 1$), obtêm-se os últimos seis coeficientes de rigidez ($r_{16} = r_{46} = 0$):

$$\begin{aligned} r_{26} &= \frac{6.EI}{L^2} \quad \therefore \quad r_{66} = \frac{4.EI}{L} \\ r_{56} &= -\frac{6.EI}{L^2} \quad \therefore \quad r_{36} = \frac{2.EI}{L} \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Reorganizando todos os termos na forma matricial, obtêm-se a matriz de rigidez no sistema local para o elemento de barra, com a direção i representada pelas linhas e a direção j pelas colunas:

$$[r] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12.EI/L^3 & 6.EI/L^2 & 0 & -12.EI/L^3 & 6.EI/L^2 \\ 0 & 6.EI/L^2 & 4.EI/L & 0 & -6.EI/L^2 & 2.EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12.EI/L^3 & -6.EI/L^2 & 0 & 12.EI/L^3 & -6.EI/L^2 \\ 0 & 6.EI/L^2 & 2.EI/L & 0 & -6.EI/L^2 & 4.EI/L \end{bmatrix} \quad (3.1.22)$$

Propriedades da matriz de rigidez do elemento no sistema local:

- ✓ a matriz é simétrica em relação à diagonal principal, $r_{ij} = r_{ji}$ - (Teorema da Reciprocidade);
- ✓ a matriz é positivo-definida;
- ✓ a matriz é quadrada (6x6);
- ✓ a matriz apresenta sempre o mesmo tamanho e mesmos coeficientes de rigidez, representando uma matriz genérica para qualquer barra de uma estrutura;
- ✓ refere-se a barras formadas por nós rígidos.

Geralmente os nós são idealizados na análise matricial de pórticos planos como rígidos e articulados. A matriz de rigidez do elemento é influenciada diretamente de acordo de como os nós se comportam, livres ou fixos.

As modificações da matriz de rigidez do elemento para uma barra articulada na extremidade direita e engastada na extremidade oposta é apresentada a seguir.

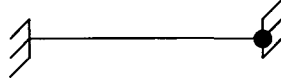


FIGURA 3.15 – Elemento fixo na extremidade esquerda e articulado na extremidade oposta.

$$[r] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 \\ 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.23)$$

Extrapolando para a situação onde as extremidades do elemento de pórtico plano são articuladas, a matriz de rigidez é simplificada a um elemento característico de treliça plana, onde somente existe coeficiente de rigidez referente ao esforço normal nos nós da barra, EA/L .



FIGURA 3.16 – Elemento com extremidades articuladas.

$$[r] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.24)$$

A influência sobre a matriz de rigidez de pórticos planos, de acordo com o comportamento que os nós do elemento apresenta, será mostrado na seção seguinte, referente à implementação da flexibilidade da ligação, já que os casos citados são exemplos específicos na abordagem do comportamento nodal. De acordo com a matriz

de rigidez de pórticos planos com ligações semi-rígidas mostrada posteriormente, pode-se simular adequadamente o comportamento do nó para os diversos casos de flexibilidade.

Uma observação importante a ser feita, ainda a respeito da matriz de rigidez de pórticos planos, refere-se ao caso onde o efeito da deformação por esforço normal não influencia significativamente na análise da estrutura. Quando isto ocorre, os coeficientes de rigidezes que representam o esforço normal, EA/L , assumem um valor muito grande tendendo ao infinito, de tal forma que os deslocamento axiais sejam desprezados no cálculo. No capítulo cinco, onde são realizados alguns exemplos de aplicação, ocorrerá este tipo de cálculo.

A seguir, são apresentadas a seqüência e a identificação dos passos necessários para a resolução de uma estrutura pelo método da rigidez.

3.1.2 Numeração dos termos constituintes da estrutura.

Antes da resolução da estrutura, é necessário identificar e numerar os nós e as barras. Esta fase é importante por se tratar de um cálculo focado numa implementação computacional, de tal modo que os estágios da análise devem ser organizados e subseqüentes. Os critérios do sistema numeração podem ser arbitrários. Geralmente, a numeração dos nós e das barras segue uma regra adotada pelo usuário que facilite e proporcione a identificação dos resultados.

Uma das regras, bastante utilizada, numera os nós da estrutura, primeiro pela parte livre e, subseqüentemente, os apoios vinculados, de tal maneira que a identificação e separação da parte livre da matriz de rigidez da estrutura seja facilmente obtida (as condições de contorno serão vistas mais adiante). Por se tratar de uma análise computacional, onde atualmente existem grandes recursos computacionais disponíveis, a numeração dos componentes da estrutura não requer grande preocupação, nem cuidados adicionais.

O tempo de processamento necessário para a determinação dos graus de liberdade livres da estrutura, bem como o processo de inversão da matriz de rigidez é dependente do tipo de numeração empregada. Existem vários processos de reordenação da matriz de rigidez da estrutura de forma a selecionar os graus de liberdade livres, otimizando o cálculo das estruturas.

3.1.3 Incidência das barras

O próximo passo visa identificar o nó inicial e final de cada barra.

Este sistema de conectar as barras isoladas da estrutura é de fundamental importância nas etapas posteriores da análise. Ele influencia o sistema de referência das barras, onde o sentido da incidência indica o eixo local da barra, e a identificação dos graus de liberdade referentes aos deslocamentos e esforços obtidos nos resultados.

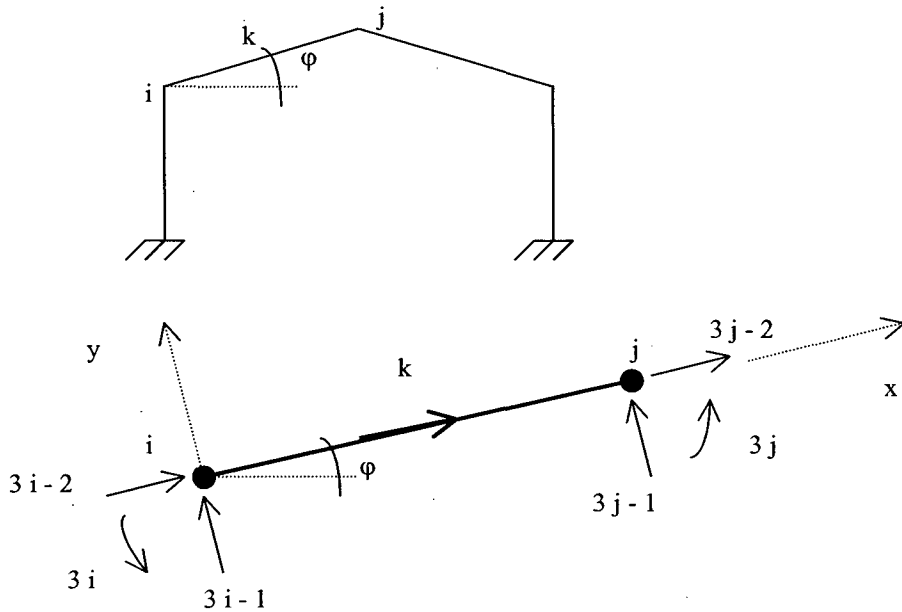
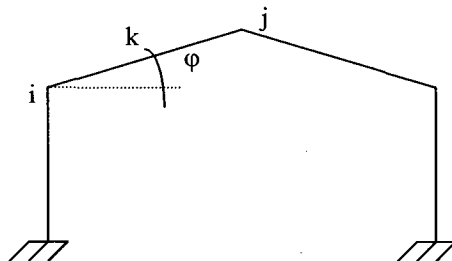


FIGURA 3.17 – Incidência de uma barra genérica k , com seus respectivos graus de liberdade, na numeração global da estrutura.

3.1.4 Sistema Local e Global de referência:

Conhecido os valores dos coeficientes de rigidez no sistema local (eixo longitudinal da barra), para cada barra que forma a estrutura estudada, necessita-se transferir estes valores para um sistema de referência que seja compatível para todas as barras da estrutura, definindo, assim, um sistema de referência denominado global. Esta modificação é realizada através da aplicação de uma matriz de transformação, $[T]$, onde seus componentes dependem do ângulo relativo que os sistemas globais e locais formam entre si.



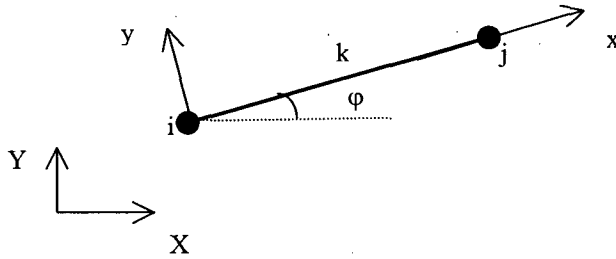


FIGURA 3.18 – Identificação dos sistemas local e global de referência.

sistema de eixo local: x e y

sistema de eixo global : X e Y

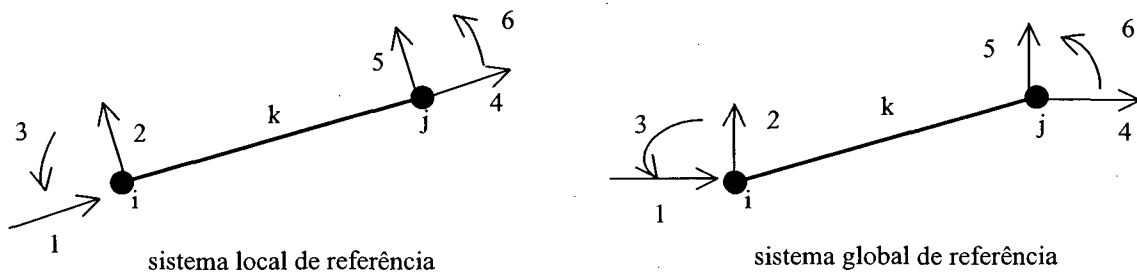


FIGURA 3.19 – Identificação dos graus de liberdade do elemento para cada sistema de eixo de referência:

Essa matriz, $[T]$, é deduzida simplesmente pela decomposição dos vetores no eixo da barra para o eixo de referência global da estrutura. É também chamada de matriz dos cossenos diretores.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.4.1)$$

Por este processo de determinação matricial, tem-se a transferência do sistema local para o sistema global de referência da matriz de rigidez do elemento, onde :

$[r]$ – matriz de rigidez do elemento no sistema local;

$[r]$ – matriz de rigidez do elemento no sistema global;

$\{d\}$ – vetor dos deslocamentos nodais da barra no sistema local;

$\{d\}$ – vetor dos deslocamentos nodais da barra no sistema global;

$\{S\}$ – vetor dos esforços nodais da barra no sistema local;

$\{S\}$ – vetor dos esforços nodais da barra no sistema global;

A equação matricial que representa a relação entre os deslocamentos locais e globais é:

$$\{\underline{d}\} = [T] * \{d\} \quad (3.1.4.2)$$

A equação matricial que representa a relação entre os esforços locais e globais é:

$$\{\underline{S}\} = [T] * \{S\} \quad (3.1.4.3)$$

As duas próximas equações matriciais de equilíbrio fornecem a relação entre os esforços e deslocamentos nos sistemas local e global, são elas:

$$\{\underline{S}\} = [\underline{r}] * \{\underline{d}\} \quad (3.1.4.4)$$

$$\{S\} = [r] * \{d\} \quad (3.1.4.5)$$

Substituindo a equação (3.1.4.1) em (3.1.4.3), tem-se:

$$\{\underline{S}\} = [\underline{r}] * [T] * \{d\} \quad (3.1.4.6)$$

Substituindo a equação (3.1.4.2) em (3.1.4.5), tem-se:

$$[T] * \{S\} = [\underline{r}] * [T] * \{d\} \quad (3.1.4.7)$$

Multiplicando ambos os lados da eq. (3.1.4.6) pela transposta da matriz de transformação, $[T]^t$, obtém-se :

$$[T]^t * [T] * \{S\} = [T]^t * [\underline{r}] * [T] * \{d\} \quad (3.1.4.8)$$

Lembrando que a matriz de transformação é uma matriz ortogonal, tem-se:

$$\begin{aligned} [T]^t &= [T]^{-1} \\ [T]^t * [T] &= [I] \end{aligned} \quad (3.1.4.9)$$

Logo, a eq. (3.1.4.7) se transforma da forma como se segue:

$$\{S\} = [T]^t * [\underline{r}] * [T] * \{d\} \quad (3.1.4.10)$$

Fazendo uma analogia com a eq. (3.1.4.4), obtém-se:

$$[r] = [T]^t * [\underline{r}] * [T] \quad (3.1.4.11)$$

Esta equação matricial, eq. (3.1.4.10), representa a relação existente entre as matrizes de rigidez global e local do elemento.

A partir das matrizes de rigidez global, forma-se a matriz da estrutura pela soma algébrica das matrizes:

$$[k] = \Sigma [r_i] \quad (3.1.4.12)$$

A dimensão da matriz de rigidez da estrutura é determinada da seguinte forma: chamando o número de nós por n e o número de graus de liberdade por m, a dimensão resultante é m x n graus de liberdade. Como o elemento de barra de pórtico plano apresenta três graus de liberdade por nó, esforço normal, esforço cortante e momento

fletor, o tamanho da matriz de rigidez da estrutura é determinado por: $3 \times n$ (é uma matriz quadrada como visto anteriormente).

Impondo-se as condições de vinculação da estrutura, obtém-se a matriz da estrutura restringida no sistema global, $[k]_{LL}$, referente à parte livre da estrutura .

Observação: Esta etapa é necessária, pois a matriz $[k]$ completa é singular, ou seja, caracteriza-se por apresentar determinante igual a zero, conseqüentemente ela não é inversível, sendo impossível resolver o sistema de equações de equilíbrio da estrutura.

3.1.5 Vetor de Esforços nas extremidades das barras:

Como foi descrito anteriormente, as ações são obtidas nos nós da estrutura. Para cargas atuantes nos pontos nodais , o vetor de esforços nodais, $\{F\}$, no sistema global da estrutura, é obtido diretamente dos graus de liberdade de cada nó.

Para uma barra genérica k , têm-se os seguintes esforços de extremidades:

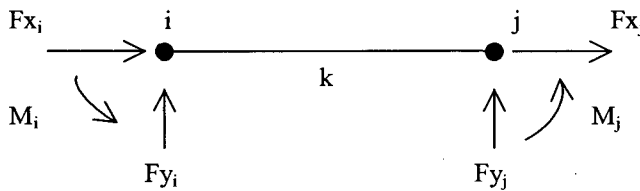


FIGURA 3.20 – Identificação dos seis esforços solicitantes para uma barra genérica k .

$$\{F\} = \left\{ \begin{array}{l} Fx_i \\ Fy_i \\ M_i \\ Fx_j \\ Fy_j \\ M_j \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nó i} \\ \dots\dots\dots \\ \text{nó j} \end{array} \quad (3.1.5.1)$$

Separando a parcela livre do vetor de esforços nodais, tem-se $\{F\}_L$, correspondendo ao vetor dos esforços nodais da estrutura restringida.

Porém, geralmente, as cargas se posicionam ao longo dos elementos da estrutura. O problema, então, consiste na transformação destas cargas distribuídas ou concentradas ao longo do vão da barra em cargas atuantes nos nós. A idéia é retirar a barra da estrutura fixando todos os seus graus de liberdade. Ao aplicar as cargas atuantes, vão surgir nas extremidades da barra seis esforços de imobilização dos nós, $\{\underline{S}_{OR}\}$, que correspondem às reações provenientes do carregamento aplicado.

A seguir apresenta-se um exemplo de aplicação para a obtenção dos coeficientes do vetor $\{ \underline{S}_{OR} \}$, para o sistema local.

Para a viga bi-engastada genérica k dada, tem-se:

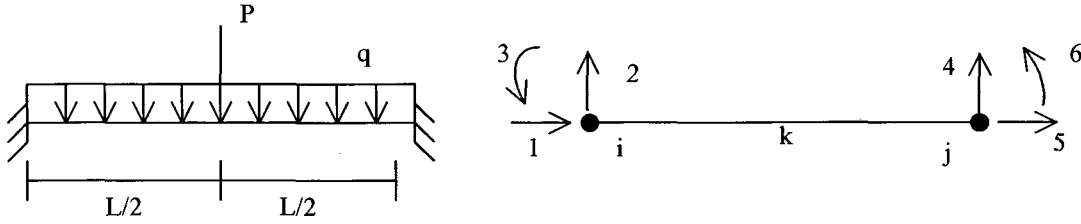


FIGURA 3.21 – Viga bi-engastada com carregamento uniformemente distribuído, carga concentrada no meio do vão e identificação dos G.L. da barra no sentido positivo.

$$\{ \underline{S}_{OR} \} = \begin{Bmatrix} \underline{S}_{OR,1} \\ \underline{S}_{OR,2} \\ \underline{S}_{OR,3} \\ \underline{S}_{OR,4} \\ \underline{S}_{OR,5} \\ \underline{S}_{OR,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ qL/2 + P/2 \\ qL^2/12 + PL/8 \\ 0 \\ qL/2 + P/2 \\ -qL^2/12 + PL/8 \end{Bmatrix} \quad (3.1.5.2)$$

Por se tratar de casos de carregamentos usuais de cálculo nas análises estruturais correntes, estão disponíveis, em bibliografia, diversas tabelas prontas com os valores desses engastamentos perfeitos. Estes valores também podem ser determinados por diversos tipos de análises existentes, método dos esforços, integração direta, equação da deformada, etc.

Agora os esforços já se encontram na posição correta e ideal (aplicados nos nós), compatível para a efetiva análise da estrutura. O estágio seguinte segue o mesmo procedimento: aplicando a matriz de transformação $[T]$ para a passagem no sistema global, tem-se:

$$\{ S_{OR} \} = [T^T] * \{ \underline{S}_{OR} \} \quad (3.1.5.3)$$

Obtém-se o vetor de ações de engastamento perfeito para a barra.

Nessa parte do cálculo, é possível somar a contribuição dos esforços globais de todos os nós das barras para formar o vetor de engastamento perfeito da estrutura não-restringida:

Montagem de $\{ F_0 \}$:

Para um nó genérico i , formado a partir de duas barras m e n com carregamento qualquer e incidências convergentes, tem-se:

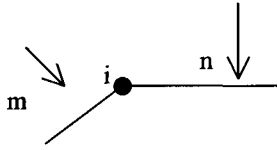


FIGURA 3.22 – Nó genérico i, formado a partir de duas barras m e n.

$$\{F_0\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{nó 1} \\ \text{nó 2} \\ \text{nó i} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{S_0^i\}_m + \{S_0^i\}_n \end{array} \right\} \quad (3.1.5.4)$$

Somando as contribuições de todos os nós da estrutura, tem-se:

$$\{F_{OR}\} = \Sigma \{S_{OR}\} \quad (3.1.5.5)$$

Para determinação da resolução pelo método da rigidez, eliminam-se os graus de liberdade referentes à condição de vinculação, resultando no vetor de engastamento perfeito no sistema global para a estrutura restringida: $\{F_0\}_L$.

Contudo, verifica-se que o vetor de engastamento perfeito não interpreta, correta e fisicamente, o efeito das cargas atuantes. O que está sendo representado, é a reação ao carregamento aplicado, e o que se deseja é a ação destas forças nas extremidades dos elementos que compõem a estrutura. Constata-se que o sentido deste vetor deve ser invertido para simular corretamente o efeito desejado. Assim, surge o vetor: $-\{F_0\}_L$, que corresponde aos esforços nodais equivalentes.

A equação generalizada de equilíbrio, a ser resolvida no método da rigidez para a determinação dos deslocamentos da parte livre da estrutura, se torna :

$$[k]_{LL} * \{\partial\}_L = \{F\}_L - \{F_0\}_L \quad (3.1.5.6)$$

Uma vez que pelo método da rigidez se determinam primeiramente os deslocamentos da parte livre da estrutura, tem-se:

$$\{\partial\}_L = [k]_{LL}^{-1} * \{F\}_L - \{F_0\}_L \quad (3.1.5.7)$$

O vetor de ações resultante, $\{F\}_L - \{F_0\}_L$, é comumente chamado de vetor dos Termos Independentes da estrutura.

A partir dos deslocamentos nodais da parte livre, $\{\partial\}_L$, da estrutura, encontram-se os deslocamentos nodais para cada barra k, $\{d_k\}$, proporcionando a determinação dos esforços no sistema global de cada barra k, $\{S_k\}$ e, finalmente, os esforços no sistema local da barra k, $\{S_k\}$.

Matricialmente:

$$\{ S_{R,k} \} = [r_k] * \{ d_k \} \quad (3.1.5.8)$$

Representa os esforços no sistema global da barra.

Aplicando a matriz de transformação [T] ao vetor dos esforços no sistema global, obtém-se:

$$\{ \underline{S}_{R,k} \} = [T_k] * \{ S_{R,k} \} \quad (3.1.5.9)$$

que representa os esforços no sistema local da barra.

Desta forma, está representada a seqüência de cálculo para obtenção dos deslocamentos e esforços solicitantes nodais de um pórtico plano através de uma análise matricial, pelo método dos deslocamentos.

3.2 - ELEMENTO COM MOLAS NAS EXTREMIDADES

É apresentado, neste capítulo, o efeito da flexibilidade, bem como sua respectiva influência no método da rigidez. Existem duas maneiras de abordar o problema:

- interpretando o elemento com molas nas extremidades de elementos de barra;
- utilizando um elemento de conexão entre barras agindo independentemente.

O elemento de conexão independente apresenta as seguintes desvantagens em relação à primeira concepção:

- ✓ aumento do número de nós e dos elementos;
- ✓ difícil determinação do comprimento do elemento de conexão, influenciando significativamente os resultados obtidos;

Para este trabalho, foi escolhido um modelo simplificado para a modelagem da conexão semi-rígida, analisado por La Rovere (Notas de Aula, 1998) e, também, por Valle et al (1998), simulando o comportamento das ligações através do elemento incorporando “molas” nas extremidades.

A conexão semi-rígida pode ser modelada com um elemento de mola de três graus de liberdade que apresentam as seguintes deformações: axial, cortante, rotacional e seus efeitos combinados (rotação + axial e rotação + cortante).

Os parâmetros de conexão, isto é, normal, cortante e rigidez à rotação, podem ser obtidos de resultados experimentais, análises numéricas ou por métodos simplificados de cálculo.

O método simplificado adotado considera, simplesmente, a rigidez à rotação da conexão para análise de estruturas semi-rígidas com “molas” nas extremidades de elementos de barra. As deformações axial, cortante e torsional isoladas e, especialmente, dos seus efeitos combinados com a deformação por rotação, apresentam valores muito pequenos. Além disso, existem poucos ensaios laboratoriais e estudos bibliográficos sobre este assunto.

Através de análises experimentais das ligações, define-se um coeficiente de flexibilidade elástica à flexão: α (adimensional):

$$\alpha = \frac{EI}{kL} \quad (3.2.1)$$

onde:

E : módulo elasticidade do material;

I : momento de inércia da seção transversal;

L : comprimento do elemento;

k : coeficiente de rigidez da ligação à flexão;

Para ilustrar as quantidades físicas do material e, sabendo que α é inversamente proporcional a k, tem-se, como exemplo :

- ligações rígidas : $k \rightarrow \infty \quad \therefore \alpha = 0$
- ligações articuladas : $k = 0 \quad \therefore \alpha \rightarrow \infty$
- ligações semi-rígidas : $0 < \alpha < \infty \quad \text{ou} \quad 0 < k < \infty$

Essa inclusão do parâmetro α transformará a matriz de rigidez da estrutura, bem como alterará o vetor de engastamento perfeito (elementos da análise onde a flexibilidade da ligação influencia diretamente).

Convém relatar que o coeficiente adimensional, α , é utilizado apenas pela sua facilidade de programação, pois é um parâmetro sem interpretação física da flexibilidade da ligação, dependente das características geométricas de cada barra, sendo proporcional ao módulo de elasticidade E e do momento de inércia no plano I, e inversamente proporcional ao comprimento da barra e à rigidez à rotação k. O que existe realmente, obtido através de ensaios experimentais, é o valor da rigidez da conexão à flexão, k. Utilizando o parâmetro teórico α , o usuário perde a sensibilidade prática e física do valor da rigidez da ligação viga-coluna.

3.2.1 – Formulação da Matriz de Rigidez e dos Esforços nos Nós

As ligações semi-rígidas são representadas pelo efeito da rotação por 2 molas elásticas nas extremidades das barras.

Para formar a matriz de rigidez do elemento com molas nas extremidades, parte-se, inicialmente, do elemento de viga :

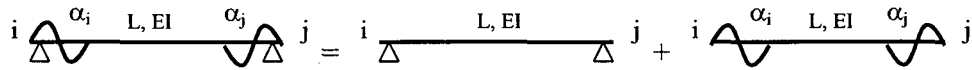


FIGURA 3.23 – Superposição dos efeitos para a composição do elemento de viga bi-apoiado com “molas” nas extremidades.

A composição para o elemento de viga é a superposição dos efeitos para a viga simplesmente apoiada e a viga com molas nas extremidades;

O esquema utilizado para se determinar a matriz de rigidez com ligações semi-rígidas do elemento é obtido inicialmente através da inversão da matriz de flexibilidade. Conforme citado na seção anterior a respeito dos modelos usuais de análise matricial das estruturas, rigidez e flexibilidade têm, como propriedade física, uma relação inversa correspondente, ou seja, a inversa da matriz de flexibilidade corresponde à matriz de rigidez e vice-versa. Porém, esta propriedade só é válida quando as ações e deslocamentos considerados na estrutura sejam correspondentes, ou seja, as redundantes escolhidas no sistema principal para o método da flexibilidade corresponderá aos deslocamentos da estrutura nos mesmos graus de liberdade ao se inverter a matriz de flexibilidade. Esse tipo de obtenção dos coeficiente de rigidez é proposto devido a sua facilidade e rapidez.

Portanto, matricialmente tem-se:

$$[F_{SR}] = [F_{viga}] + [F_{mola}] \quad (3.2.2)$$

e graus de liberdade do elemento de viga com ligações semi-rígidas :

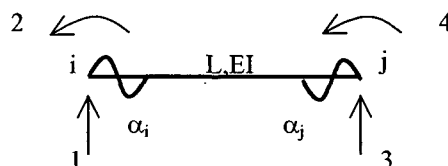


FIGURA 3.24 – Identificação dos graus de liberdade do elemento de viga com “molas” nas extremidades.

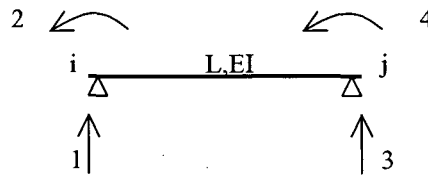


FIGURA 3.25 – Identificação dos graus de liberdade de uma viga bi-apoiada.

Como as direções 1 e 3 são restringidas e 2 e 4 liberadas (figura 3.25), a matriz de flexibilidade se torna:

$$[F_{\text{viga}}]_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} F_{22} & F_{24} \\ F_{42} & F_{44} \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

Aplicando o método da flexibilidade à estrutura onde o coeficiente de rigidez genérico é assim definido:

F_{ij} : é o deslocamento na direção generalizada i, causada por uma ação unitária na direção j, e demais ações nulas.

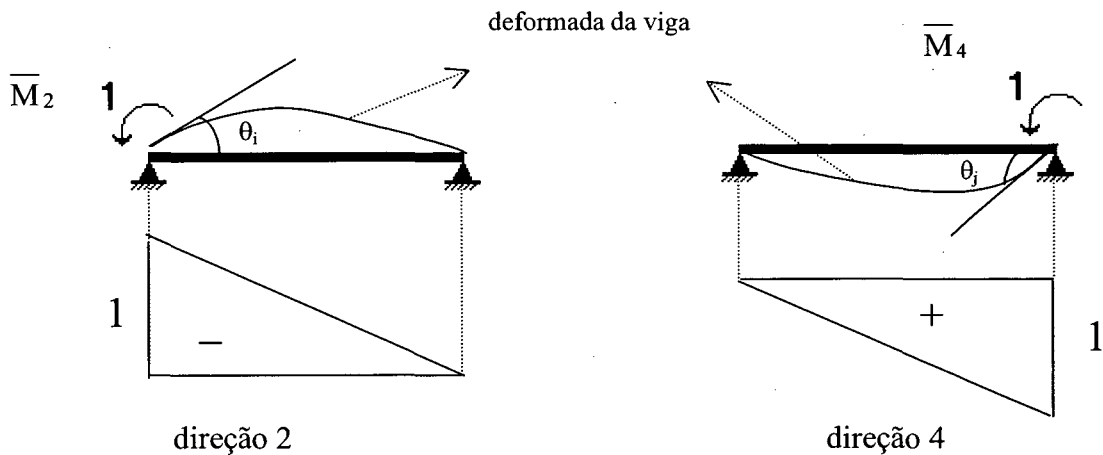


FIGURA 3.26 - Diagrama de momentos fletores para um carregamento virtual $\bar{M} = 1$, referentes à rotação das extremidades da viga.

Utilizando a equação de ação, adotando um valor unitário para a ação (momento M), tem-se a proporcionalidade dos deslocamentos de uma estrutura relacionado com sua flexibilidade.

$$M = \frac{1}{F} \cdot \theta \quad \therefore \quad \theta = M \cdot F \quad \therefore \quad \text{para } \bar{M} = 1 \quad \therefore \quad \theta = F \quad (3.2.4)$$

Admitindo que as barras reticuladas que compõem a estrutura sejam retas, apresentam seção A, módulo de elasticidade E e momento de inércia I constantes. Utilizando o conceito do Princípio dos Trabalhos Virtuais, ou seja, combinando estes gráficos de momentos, têm-se:

$$F_{22} = \int_{estr} \left(\frac{\overline{M}_2^2}{EI} \right) dS = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot L \right) = \frac{L}{3EI} \quad (3.2.5)$$

$$F_{44} = \int_{estr} \left(\frac{\overline{M}_4^2}{EI} \right) dS = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot L \right) = \frac{L}{3EI} \quad (3.2.6)$$

$$F_{24} = \int_{estr} \left(\frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_4}{EI} \right) dS = -\frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot L \right) = -\frac{L}{6EI} = F_{42} \quad (3.2.7)$$

Substituindo os valores dos coeficientes na matriz de flexibilidade 2 x 2, tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_{22} & F_{24} \\ F_{42} & F_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} = [F_{viga}] \quad (3.2.8)$$

Invertendo-se a matriz de flexibilidade da viga, obtém-se matriz de rigidez [k] para viga bi-apoiada (elemento), segundo Gere & Weaver (1987).

$$[k_{viga}] = [F^{-1}_{viga}] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

A matriz de flexibilidade da mola, [F_{mola}], é função do coeficiente de flexibilidade elástica, α :

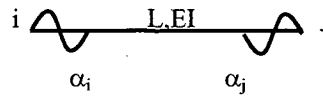


FIGURA 3.27 – Elemento de viga com “molas” nas extremidades.

Para o coeficiente da matriz de flexibilidade de viga com “molas” nas extremidades, inversamente proporcional ao coeficiente de rigidez k, tem-se:

$$f = \frac{1}{k} = \frac{\alpha \cdot L}{EI} \quad (3.2.10)$$

Matricialmente, a matriz de flexibilidade da mola torna-se:

$$[F_{\text{mola}}] = \begin{bmatrix} f_i & 0 \\ 0 & f_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_i L}{EI} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_j L}{EI} \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

Portanto, superpondo os efeitos da estrutura para matriz de flexibilidade, com e sem molas, de acordo com equação (3.2.2), tem-se:

$$[F_{\text{SR}}] = [F_{\text{viga}}] + [F_{\text{mola}}] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} + \frac{\alpha_i L}{EI} & -\frac{L}{6EI} \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} + \frac{\alpha_j L}{EI} \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

Invertendo-se a matriz de flexibilidade da viga com ligações semi-rígidas, correspondendo aos graus de liberdade de giro 2 e 4, obtém-se:

$$[I_{\text{SR}}] = [F_{\text{SR}}^{-1}] = \begin{bmatrix} r_{22} & r_{24} \\ r_{42} & r_{44} \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

Procedimento da dedução da inversa da matriz de flexibilidade:

Matriz de flexibilidade:

$$F_{\text{SR}} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} + \frac{\alpha_i L}{EI} & -\frac{L}{6EI} \\ -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} + \frac{\alpha_j L}{EI} \end{bmatrix}$$

1) Determinar o determinante da matriz de flexibilidade: $\det F_{\text{SR}}$

$$|F_{\text{SR}}| = \left(\frac{L}{3EI} + \frac{\alpha_i L}{EI} \right) \left(\frac{L}{3EI} + \frac{\alpha_j L}{EI} \right) - \left[\left(-\frac{L}{6EI} \right) \left(-\frac{L}{6EI} \right) \right] \therefore$$

$$\therefore |F_{\text{SR}}| = \left(\frac{L^2}{EI} \right) \left[\left(\frac{1}{3} + \alpha_i \right) \left(\frac{1}{3} + \alpha_j \right) - \frac{1}{36} \right]$$

2) transposta da matriz de flexibilidade: $(F_{\text{SR}})^t$

A simetria é uma das propriedades que a matriz de flexibilidade apresenta. Assim sendo, verifica-se:

$$(F_{\text{SR}}) = (F_{\text{SR}})^t$$

3) matriz adjunta:

$$(F_{SR})' = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} + \frac{\alpha_j L}{EI} & \frac{L}{6EI} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} + \frac{\alpha_i L}{EI} \end{bmatrix}$$

4) inversa da matriz de flexibilidade:

$$(F_{SR})^{-1} = \frac{1}{|F_{SR}|} * (F_{SR})'$$

$$(F_{SR})^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{L}{EI}\right)^2 * \left[\left(\frac{1}{3} + \alpha_i\right)\left(\frac{1}{3} + \alpha_j\right) - \frac{1}{36}\right]} * \frac{1}{EI} * \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \alpha_j & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} + \alpha_i \end{bmatrix}$$

Multiplicando ambos os lados da equação pelo fator 1/36, tem-se:

$$(F_{SR})^{-1} = \frac{1}{\frac{L}{EI} * [4(1 + 3\alpha_i)(1 + 3\alpha_j) - 1]} * 36 * \begin{bmatrix} \left(\frac{1 + 3\alpha_j}{3}\right) & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \left(\frac{1 + 3\alpha_i}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Rearranjando os termos, tem-se:

$$(F_{SR})^{-1} = \frac{EI}{L} * \frac{1}{4(1 + 3\alpha_i)(1 + 3\alpha_j) - 1} * \begin{bmatrix} 12(1 + 3\alpha_j) & 6 \\ 6 & 12(1 + 3\alpha_i) \end{bmatrix} = (r_{SR}) \quad (3.2.14)$$

onde a inversa da matriz de flexibilidade semi-rígida da viga corresponde à matriz de rigidez semi-rígida da viga, definindo, assim, os coeficientes da matriz de rigidez da viga bi-apoiada, referentes aos graus de liberdade de giro:

$$r_{22} = \frac{EI}{L} * \frac{1}{4(1 + 3\alpha_i)(1 + 3\alpha_j) - 1} * 12(1 + 3\alpha_j) \quad (3.2.15)$$

$$r_{24} = \frac{EI}{L} * \frac{1}{4(1 + 3\alpha_i)(1 + 3\alpha_j) - 1} * 6 = r_{42} \quad (3.2.16)$$

$$r_{44} = \frac{EI}{L} * \frac{1}{4(1 + 3\alpha_i)(1 + 3\alpha_j) - 1} * 12(1 + 3\alpha_i) \quad (3.2.17)$$

Como o elemento de viga apresenta quatro graus de liberdade, a matriz de rigidez do elemento [r] é de dimensão (4x4).

Utilizando o método de rigidez, ou seja, aplicando deslocamentos unitários nos graus de liberdade da estrutura, encontram-se, por equilíbrio, todos os coeficientes da matriz de rigidez do elemento de viga não- restringida no sistema local (4x4), isto é:

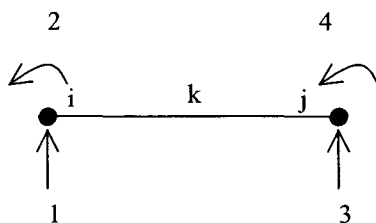


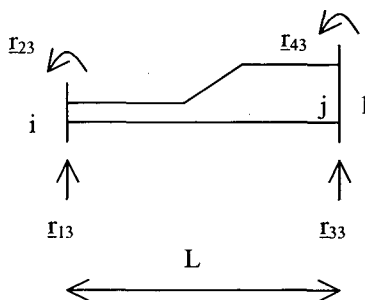
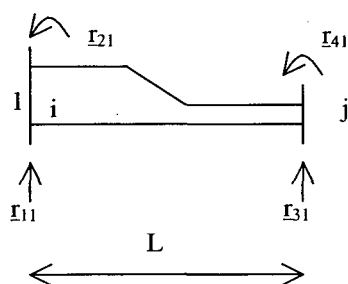
FIGURA 3.28 – Identificação dos quatro graus de liberdade de um elemento de viga.

onde o coeficiente de rigidez genérico $[r_{12}]$ exprime o esforço na direção 1, devido a um deslocamento unitário na direção 2, sendo os outros deslocamentos nulos.

- Deslocamento unitário na direção dos graus de liberdade 1 e 3:

1. $d'_1 = 1$: (d'_2 a $d'_4 = 0$)

2. $d'_3 = 1$: ($d'_1 = d'_2 = d'_4 = 0$)



$$\sum M_i = 0$$

$$\sum M_j = 0$$

$$r_{41} + r_{31} \cdot L + r_{21} = 0$$

$$r_{43} + r_{33} \cdot L + r_{23} = 0$$

$$r_{41} = -r_{31} \cdot L - r_{21} \quad (3.2.18)$$

$$r_{43} = -r_{33} \cdot L - r_{23} \quad (3.2.20)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$r_{11} + r_{31} = 0$$

$$r_{13} + r_{33} = 0$$

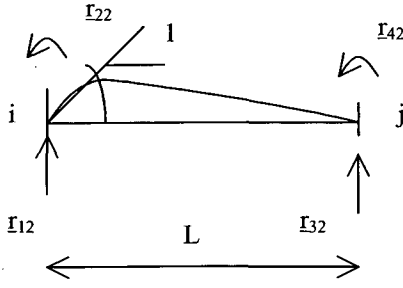
$$r_{11} = -r_{31} \quad (3.2.19)$$

$$r_{13} = -r_{33} \quad (3.2.21)$$

- Deslocamento unitário na direção dos graus de liberdade 2 e 4:

3. $d'_2 = 1$: ($d'_1 = d'_3 = d'_4 = 0$)

4. $d'_4 = 1$: (d'_1 a $d'_3 = 0$)



$$\sum M_j = 0$$

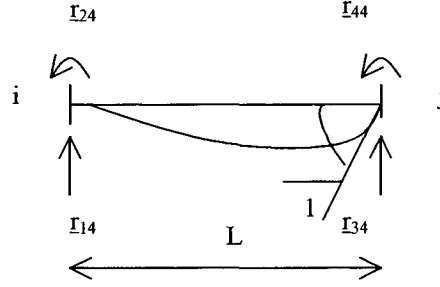
$$r_{42} - r_{12} \cdot L + r_{22} = 0$$

$$r_{12} = \frac{r_{22} + r_{42}}{L} \quad (3.2.22)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$r_{12} + r_{32} = 0$$

$$r_{12} = -r_{32} \quad (3.2.23)$$



$$\sum M_j = 0$$

$$r_{44} - r_{14} \cdot L + r_{24} = 0$$

$$r_{14} = \frac{r_{24} + r_{44}}{L} \quad (3.2.24)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$r_{14} + r_{34} = 0$$

$$r_{14} = -r_{34} \quad (3.2.25)$$

Substituindo a equação (3.2.22) e (3.2.24) na equação (3.2.18), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{r_{44} + r_{24}}{L} &= -r_{31} \cdot L - \left(\frac{r_{42} + r_{22}}{L} \right) \\ r_{31} \cdot L &= -\left(\frac{r_{44} + r_{24}}{L} \right) - \left(\frac{r_{42} + r_{22}}{L} \right) \\ r_{31} &= \frac{-r_{44} - r_{22} - r_{24} - r_{42}}{L^2} \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

De acordo com a eq. (3.2.19), tem-se:

$$r_{11} = \frac{r_{44} + r_{22} + r_{24} + r_{44}}{L^2} \quad (3.2.27)$$

Os coeficientes de rigidez restantes são obtidos por simetria:

$$r_{12} = r_{21} \quad ; \quad r_{13} = r_{31} \quad ; \quad r_{14} = r_{41} \quad ; \quad r_{23} = r_{32} \quad ; \quad r_{34} = r_{43} \quad (3.2.28)$$

Reorganizando os coeficientes numa matriz de ordem 4x4, obtém-se a matriz de rigidez de viga bi-apoiada no sistema local para ligações semi-rígidas:

$$[\mathbf{I}_{SR}]_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} \frac{r_{22} + r_{44} + r_{24} + r_{42}}{L^2} & \frac{r_{22} + r_{42}}{L} & -r_{11} & \frac{r_{24} + r_{44}}{L} \\ \frac{r_{22} + r_{42}}{L} & r_{22} & -r_{12} & r_{24} \\ -r_{11} & -r_{12} & -r_{13} & -r_{14} \\ \frac{r_{24} + r_{44}}{L} & r_{42} & -r_{14} & r_{44} \end{bmatrix} \quad (3.2.29)$$

Para a análise de pórticos planos, basta adicionar dois graus de liberdade à matriz de rigidez do elemento de viga com ligações semi-rígidas referentes às rigidezes do esforço normal, EA/L , tratando os esforços normais e de flexão desacoplados, resultando na matriz de rigidez do elemento de pórtico plano que possui dimensão (6×6) . Isto é possível porque a matriz de flexibilidade da mola (F_{mola}) possui a mesma forma da matriz de viga já citada, bem como a matriz de flexibilidade $[F]$ do elemento, sem o efeito das molas, sendo da ordem 2×2 , porém com alteração dos índices para a numeração de identificação dos graus de liberdade.

Desta forma, é obtida a montagem da matriz de rigidez do elemento de pórtico plano, no sistema local para ligações semi-rígidas.

$$[\mathbf{I}_{SR(pórtico)}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_{33} + r_{66} + r_{36} + r_{63}}{L} & \frac{r_{33} + r_{36}}{L} & 0 & -r_{22} & \frac{r_{36} + r_{66}}{L} \\ 0 & \frac{r_{33} + r_{36}}{L} & r_{33} & 0 & -r_{23} & r_{36} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{22} & -r_{23} & 0 & -r_{25} & -r_{26} \\ 0 & \frac{r_{36} + r_{66}}{L} & r_{63} & 0 & -r_{26} & r_{66} \end{bmatrix} \quad (3.2.30)$$

Definido um fator s como sendo um termo constante na matriz de rigidez do elemento com ligações semi-rígidas, para otimizar as operações matriciais, tem-se:

$$s = \frac{EI}{L} \cdot \frac{1}{4 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_i) \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_j) - 1} \quad (3.2.31)$$

Substituindo os valores dos coeficientes de rigidez em termos de α , E , I , A e L , tem-se:

$$[r_{SR}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{12s}{L} \cdot [1 + (1 + 3\alpha_i) \cdot (1 + 3\alpha_j)] & \frac{s}{L} \cdot [12 \cdot (1 + 3\alpha_j)] & 0 & -r_{22} & \frac{s}{L} \cdot [6 + 12 \cdot (1 + 3\alpha_i)] \\ \frac{SIM}{s \cdot [12 \cdot (1 + 3\alpha_j)]} & 0 & -r_{23} & 6s \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ r_{22} & -r_{26} & s \cdot [12 \cdot (1 + 3\alpha_i)] \end{bmatrix} \quad (3.2.32)$$

Essa matriz de rigidez semi-rígida do elemento é definida como sendo uma matriz de rigidez genérica na análise das ligações de pórticos planos. A partir dela, pode-se: obter o cálculo para ligações rígidas, substituindo o valor de α como sendo nulo nos coeficientes de rigidez genérico r_{ij} , simular ligações articuladas fazendo α tender ao infinito ou utilizar qualquer valor intermediário da flexibilidade da ligação.

Utilizando o mesmo procedimento para o cálculo usual da matriz de rigidez no sistema global, aplica-se a matriz de transformação $[T]$, como segue:

$$[r_{SR}] = [T]^T * [r_{SR}] * [T] \quad (3.2.33)$$

A partir soma algébrica das matrizes de rigidez global, é formada a matriz de rigidez da estrutura:

$$[k_{SR}] = \Sigma [r_{i SR}] \quad (3.2.34)$$

Impondo-se as condições de vinculação da estrutura, obtém-se a matriz da estrutura restringida no sistema global, $[k_{SR}]_{LL}$, referente à parte livre da estrutura.

A aplicação do coeficiente de flexibilidade elástica da ligação, α , para representar o efeito das ligações semi-rígidas na análise matricial das estruturas, influencia diretamente a matriz de rigidez do elemento, como mostrado, e o vetor de engastamento perfeito $\{F_{0SR}\}$.

O procedimento utilizado para determinação do vetor de engastamento perfeito para ligação semi-rígidas considera a flexibilidade elástica das ligações nas extremidades dos elementos através do parâmetro α .

A influência das ligações semi-rígidas, no vetor de ações de engastamento perfeito $\{S_0\}$ do elemento, é determinada pela aplicação de uma matriz de modificação $[M]$. Essa matriz é a mesma que se aplica à matriz de rigidez do elemento $[r]$ com

ligações rígidas para obter a matriz de rigidez de um elemento com ligações semi-rígidas no sistema local.

Matricialmente, tem-se:

$$[\underline{r}_{SR}] = [M] * [\underline{r}] \quad (3.2.35)$$

Pós-multiplicando pela inversa da matriz de rigidez, $[\underline{r}^{-1}]$, tem-se:

$$[M] = [\underline{r}_{SR}] * [\underline{r}^{-1}] = [\underline{r}_{SR}] * [\underline{F}] \quad (3.2.36)$$

Onde:

$[\underline{r}_{SR}]$ – matriz de rigidez do elemento com ligações semi-rígidas;

$[\underline{F}]$ – matriz de flexibilidade do elemento restringido com ligações rígidas.

Desenvolvendo matricialmente a equação (3.2.17), obtém-se a matriz de modificação:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = s * \begin{bmatrix} 12(1+3\alpha_j) & 6 \\ 6 & 12(1+3\alpha_i) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{L}{3.EI} & -\frac{L}{6.EI} \\ -\frac{L}{6.EI} & \frac{L}{3.EI} \end{bmatrix} \quad (3.2.37)$$

Efetuada a multiplicação matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \frac{s * L}{EI} * \begin{bmatrix} 4.(1+3\alpha_j)-1 & -2.(1+3\alpha_j)+2 \\ 2-2.(1+3\alpha_i) & -1+4.(1+3\alpha_i) \end{bmatrix} \quad (3.2.38)$$

A matriz $[M]$ de modificação atua sobre os graus de liberdade 3 e 6 do elemento de pórtico plano, possuindo dimensão 2x2, pois são as ações correspondentes aos graus de liberdade de giro que são afetados pelo coeficiente de flexibilidade α .

O vetor de esforços de engastamento perfeito para ligações semi-rígidas no sistema local para cada barra é obtido através do produto matricial entre a matriz de modificação (em função do parâmetro adimensional que leva em conta a flexibilidade da ligação) e o vetor de esforços de engastamento perfeito para ligações rígidas no sistema local:

$$\{ \underline{S}_{0SR} \} = [M] * \{ \underline{S}_{0R} \} \quad (3.2.39)$$

Desenvolvendo os termos matricialmente, tem-se:

$$\{ \underline{S}_{0SR} \} = \begin{Bmatrix} \underline{S}_{0SR,3} \\ \underline{S}_{0SR,6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \underline{S}_{0R,3} \\ \underline{S}_{0R,6} \end{Bmatrix} \quad (3.2.40)$$

Para o exemplo de uma viga bi-engastada, solicitada por um carregamento uniformemente distribuído q , e uma carga concentrada no meio do vão, semelhante à

seção anterior, obtém-se os coeficientes do vetor de engastamento perfeito no sistema local para ligações rígidas $\{ \underline{S}_{0R} \}$.

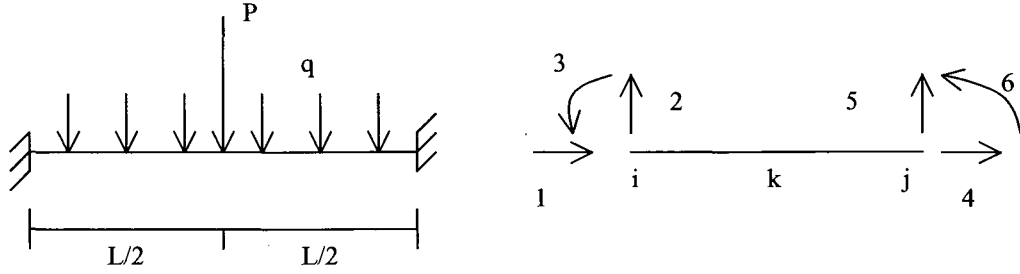


FIGURA 3.29 – Exemplo de uma viga bi-engastada e identificação dos graus de liberdade com sentido positivos.

$$\{ \underline{S}_{0R} \} = \begin{Bmatrix} \underline{S}_{0R,1} \\ \underline{S}_{0R,2} \\ \underline{S}_{0R,3} \\ \underline{S}_{0R,4} \\ \underline{S}_{0R,5} \\ \underline{S}_{0R,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} + \frac{P}{2} \\ \frac{qL^2}{12} + \frac{PL}{8} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} + \frac{P}{2} \\ -\left(\frac{qL}{12} + \frac{PL}{8} \right) \end{Bmatrix} \quad (3.2.41)$$

Desenvolvendo a equação (3.2.40), têm-se os esforços referentes aos graus de liberdade 3 e 6 de giro, caracterizando os momentos fletores semi-rígidos nas extremidades do elemento no sistema local:

$$\underline{S}_{0SR,3} = \frac{sL}{EI} * [4.(1 + 3\alpha_j) - 1] * \left(\frac{qL^2}{12} + \frac{PL}{8} \right) + \frac{2sL}{EI} * [1 - (1 + 3\alpha_j)] * \left(-\frac{qL^2}{12} - \frac{PL}{8} \right) \quad (3.2.42)$$

$$\underline{S}_{0SR,6} = \frac{sL}{EI} * [4.(1 + 3\alpha_i) - 1] * \left(-\frac{qL^2}{12} - \frac{PL}{8} \right) + \frac{2sL}{EI} * [1 - (1 + 3\alpha_i)] * \left(+\frac{qL^2}{12} + \frac{PL}{8} \right) \quad (3.2.43)$$

Os demais coeficientes do vetor $\{ \underline{S}_{0SR} \}$, referentes aos graus de liberdade 1, 2, 4 e 5, são encontrados por equilíbrio das forças internas e externas atuante no elemento.

$$\rightarrow \oplus \Sigma F_x = 0 \quad \therefore \underline{S}_{0SR,1} + \underline{S}_{0SR,4} = 0 \quad (3.2.44)$$

$$\uparrow \oplus \Sigma F_y = 0 \quad \therefore \underline{S}_{0SR,2} + \underline{S}_{0SR,5} - qL - P = 0 \quad (3.2.45)$$

$$\curvearrowright \oplus \Sigma M_i = 0 \quad \therefore \underline{S}_{0SR,2} * L - \underline{S}_{0SR,6} - \underline{S}_{0SR,5} - qL * \frac{L}{2} - P * \frac{L}{2} = 0 \quad (3.2.46)$$

$$\therefore \underline{S}_{0SR,2} = 1/L * [\underline{S}_{0SR,6} + \underline{S}_{0SR,5} + qL^2/2 + PL/2] \quad (3.2.47)$$

Substituindo a equação (3.2.29) em (3.2.27), tem-se:

$$\underline{S}_{0SR,5} = -\underline{S}_{0SR,3} - \underline{S}_{0SR,6} + q.L/2 + P/2 \quad (3.2.48)$$

Transferindo para o sistema global de referência, pré-multiplicando o vetor $\{ S_{0SR} \}$ pela transposta da matriz de transformação, $[T]^T$, tem-se:

$$\{ S_{0SR} \} = [T]^T * \{ \underline{S}_{0SR} \} \quad (3.2.49)$$

Obtém-se o vetor de ações de engastamento perfeito para a estrutura não-restringida, somando-se a contribuição de todos os elementos:

$$\{ F_{0SR} \} = \Sigma \{ S_{0SR} \} \quad (3.2.50)$$

Eliminando os graus de liberdade referentes à condição de vinculação, tem-se o vetor de ações de engastamento perfeito no sistema global para a estrutura restringida: $\{ F_0 \}_L$.

O vetor de esforços nodais é obtido da mesma forma que a aplicação do método dos deslocamentos para ligações rígidas, não influenciando no efeito da flexibilidade da ligação que simulam molas elásticas.

$$\{ F \}_L = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (3.2.51)$$

Para cada nó i da estrutura obtém-se três esforços nodais: normal, cortante e momento fletor, respectivamente, da estrutura restringida no sistema global.

Aplicando a equação de equilíbrio para cada grau de liberdade de nó:

$$[k_{SR}]_{LL} * \{ \partial_{SR} \}_L = \{ F_{SR} \}_L - \{ F_{SR} \}_{0L} \quad (3.2.52)$$

Determina-se, a seguir, o vetor dos deslocamentos nodais da parte livre da estrutura:

$$\{ \partial_{SR} \}_L = [k_{SR}]_{LL}^{-1} * \{ F_{SR} \}_L - \{ F_{SR} \}_{0L} \quad (3.2.53)$$

As etapas seguintes seguem o procedimento usual de cálculo pelo método da rigidez.

Matricialmente, para uma barra genérica k , tem-se:

$$\{ S_{SR,k} \} = [r_k] * \{ d_k \} \quad (3.2.54)$$

que representa os esforços semi-rígidos no sistema global da barra.

Aplicando a matriz de transformação $[T]$, obtém-se os esforços semi-rígidos no sistema local da barra:

$$\{ S_{SR,k} \} = [T_k] * \{ S_{SR,k} \} \quad (3.2.55)$$

3.3 - ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA

Várias pesquisas realizadas no campo dos ensaios experimentais comprovam que o comportamento das peças conectadas à flexão, caracterizado pela relação momento fletor versus rotação, apresenta um caráter não-linear.

Numa análise estrutural, a não-linearidade pode ser estabelecida por rotinas iterativas utilizando vários métodos, tais como: linear, bi-linear, tri-linear, polinomial, exponencial, secante, tangente, modelo dos 3 parâmetros de Kishi e Chen, modelo simplificado secante por Bakarat e Chen, etc. Como a curva real apresenta, em cada ponto, rigidezes diferentes, uma formulação iterativa tem que ser proposta. Pode ser observado que, para pequenos níveis de momento e/ou rotação, uma aproximação linear à reação não-linear à flexão da conexão se adapta com bastante eficácia, não sendo necessário a aplicação de um método não-linear mais preciso.

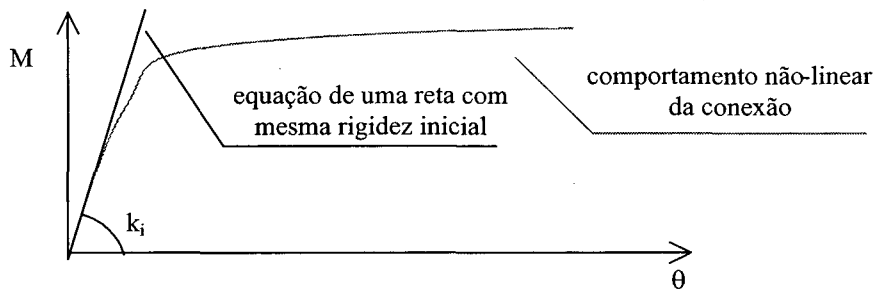


FIGURA 3.30 – Aproximação linear precisa para pequenos níveis de momento.

Segundo Bjorhovde (1984) apud Kirby et al. (1996), a partir de ensaios experimentais, observou-se que para vigas simplesmente apoiadas de dimensões usuais e sujeitas a um carregamento uniformemente distribuído, carga de serviço, as rotações de apoio dessas vigas são geralmente menores que 0.0092 rad, ou seja,

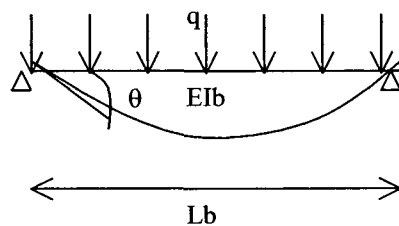


FIGURA 3.31 – Deformada de uma viga apoiada com carregamento uniformemente distribuído .

$$\frac{q \cdot L_b^3}{24 \cdot EI_b} \leq 0.0092 \text{ rad} \quad (3.3.1)$$

onde:

q = carga uniformemente distribuída;

L_b = comprimento da viga;

E = módulo de elasticidade do material;

I_b = momento de inércia da viga;

Nesta rotação, Bjorhovde (op.cit) propôs que há somente um pequeno aumento do momento de restrição calculado, usando a rigidez tangente linear inicial que coincide com a rigidez secante linear inicial.

Conclui-se que a característica não-linear de conexões típicas somente se tornam significantes para rotações maiores que 0.0092 rad.

momento da conexão, M

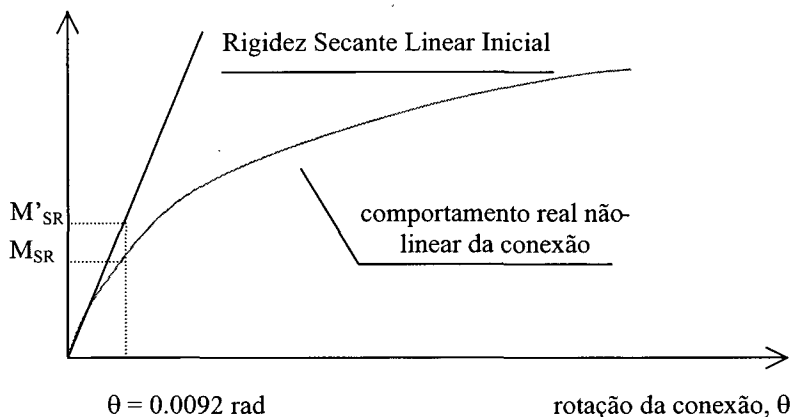


FIGURA 3.32 – Ilustração da pequena superestimação do momento semi-rígido utilizando uma rigidez secante linear inicial para uma rotação dada.

3.3.1 Método Iterativo Secante:

A rigidez de uma conexão à flexão pode ser representada pela inclinação da curva momento-rotação para qualquer valor do momento. O caráter não-linear da curva momento-rotação indica que a rigidez decresce com o acréscimo de carga para as conexões semi-rígidas. Portanto, necessita-se de um método iterativo que forneça valores de rigidezes para um nível de momento solicitante específico.

Com o objetivo de apresentar um método que seja facilmente implementado em programas computacionais e utilizado por projetistas, o método iterativo secante é adotado para simular a rigidez à flexão da ligação viga-pilar.

A escolha deste método está baseada no objetivo de se implementar facilmente em programas computacionais, cujas características são:

- simples repetição da análise de primeira ordem;
- não ser sensível a variações locais do diagrama;

O caráter não-linear da conexão será apresentado, neste trabalho por um diagrama momento-rotação bi-linear. Essa aproximação da curva momento-rotação da conexão é usada em muitos programas de análises que são baseados em métodos simplificados (Stark and Bijlaard (1998) apud Bjorhovde et al (1990)). Esse tipo de procedimento pode ser facilmente estendido para diagramas mais complexos.

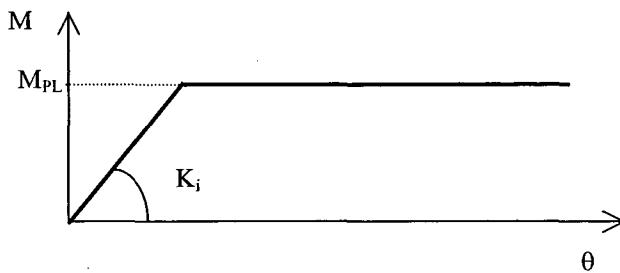


FIGURA 3.33 – Relação momento fletor versus rotação elasto-plástico perfeito.

O elemento de conexão é representado por uma mola rotacional com rigidez à flexão igual ao quociente existente entre o momento e a rotação relativa correspondente, ou seja:

$$SE = \frac{|M_{PL}|}{\theta_{SR}} \quad (3.3.2)$$

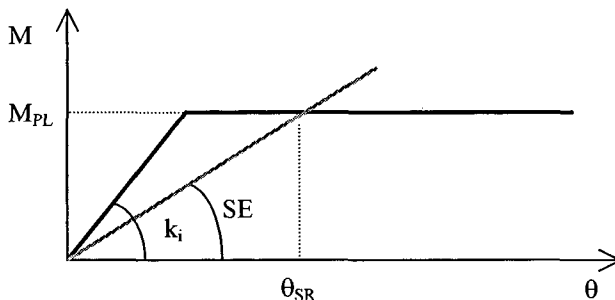


FIGURA 3.34 – Relação momento fletor versus rotação elasto-plástico perfeito.

A implementação do Método Iterativo Secante no programa de Pórtico Plano na linguagem Visual Basic 5.0, para um diagrama momento-rotação da ligação elasto – plástico ideal, foi feito do seguinte modo, retirado de Loriggio (1999).

Os termos utilizados estão abaixo discriminados:

M_{pL} – momento de plastificação da ligação;

k – rigidez inicial da ligação;

ϕ - rotação relativa da ligação;

M_i – momento obtido na ligação na iteração i ;

ϕ_i – rotação relativa da ligação na iteração i ;

k_i – nova rigidez obtida na iteração i .

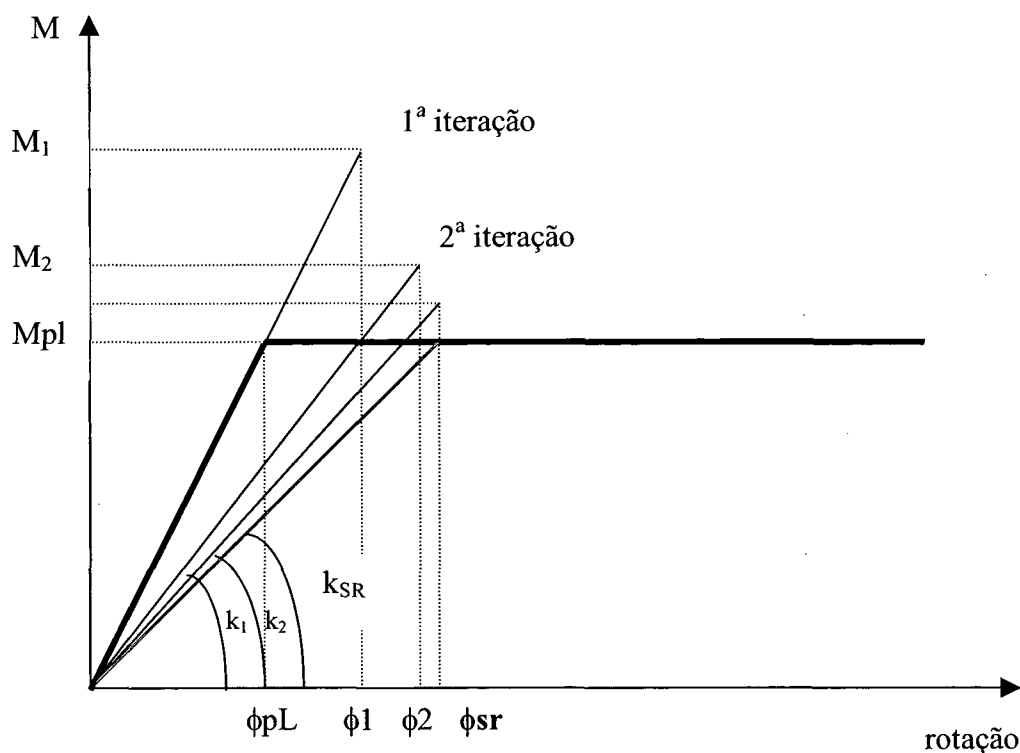


FIGURA 3.35 – Aplicação do método iterativo secante em um diagrama momento-rotação da ligação.

Dado um diagrama momento-rotação elasto-plástico perfeito, com momento de plastificação e rigidez inicial pré-determinados, é aplicado o método secante para simular a flexibilidade da conexão, correspondendo à primeira iteração.

Para $M_i > M_{pL}$:

1ª iteração:

$$M_1 = k * \phi_1 \quad \text{ou} \quad \phi_1 = \frac{M_1}{k}$$

$$M_{pL} = k_1 * \phi_1 \quad \text{ou} \quad M_{pL} = k_1 * \frac{M_1}{k} \quad ; \quad \text{logo:}$$

$$k_1 = k * \frac{M_{pL}}{M_1} \quad (3.3.3)$$

Como o coeficiente de flexibilidade elástica, $\alpha = \frac{EI}{kL}$, e sabe-se que é inversamente proporcional ao coeficiente de rigidez, $\alpha = \frac{1}{k}$; têm-se, substituindo na equação anterior, (3.3.3):

$$\alpha_1 = \alpha * \frac{M_1}{M_{pL}} \quad (3.3.4)$$

Caso contrário, $M_i < M_{pL}$, com o fim das iterações. O momento atuante na conexão é o próprio M_i .

Para $M_2 \neq M_{pL}$, uma segunda iteração é aplicada:

$$M_2 = k_1 * \phi_2 \quad \text{ou} \quad \phi_2 = \frac{M_2}{k_1}$$

$$M_{pL} = k_2 * \phi_2 \quad \text{ou} \quad M_{pL} = k_2 * \frac{M_2}{k_1} \quad ; \quad \text{logo:}$$

$$k_2 = k_1 * \frac{M_{pL}}{M_2} \quad \text{ou} \quad \alpha_2 = \alpha_1 * \frac{M_2}{M_{pL}} \quad (3.3.5)$$

Caso continue $M_i \neq M_{pL}$, o método iterativo secante é acionado, em termos do coeficiente adimensional elástico:

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} * \frac{M_i}{M_{pL}} \quad (3.3.6)$$

até atingir a seguinte convergência:

$M_i - M_{pL}$ em módulo seja menor ou igual a um coeficiente tolerante de 1 %.

Assim sendo, será realizada uma análise não-linear matricial pelo método da rigidez em ligações metálicas associadas a elementos prismáticos.

4 - MODELAMENTO DE CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS

Uma parte importante na execução de um projeto estrutural consiste no modelo a ser idealizado para a estrutura real na aplicação de um cálculo estrutural. As estruturas encontradas na prática apresentam um grau de complexidade elevado na visão de um projetista. São estruturas tridimensionais, contínuas, com carregamentos diversos, compostas por materiais anisotrópicos.

A função de um projetista consiste em entender e “sentir” como a estrutura se comporta fisicamente, transpondo e a transformando para um modelo estrutural que simule adequadamente seu comportamento e que seja facilmente aplicado às teorias de cálculo existentes.

Nesta fase inicial de cálculo, é que se distingue a qualidade de um projetista. Convém relatar uma citação feita por Johnston & Lim, em seu livro “Basic Steel Design” que comenta sobre o assunto com bastante procedência.

“Um bom projetista estrutural pensa de fato em sua estrutura tanto quanto ou mais do que pensa no modelo matemático que usa para verificar os esforços internos, baseado nos quais ele deverá determinar o material necessário, tipo, dimensão e localização dos membros que conduzem as cargas. A “mentalidade da engenharia estrutural” é aquela capaz de visualizar a estrutura real, as cargas sobre ela, enfim “sentir” como estas cargas são transmitidas através dos vários elementos até as fundações. Os grandes projetistas são dotados daquilo que às vezes se tem chamado “intuição estrutural”. Para desenvolver a “intuição e sentir”, o engenheiro torna-se um observador arguto de outras estruturas. Pode até mesmo deter-se para contemplar o comportamento de uma árvore projetada pela natureza para suportar as tempestades violentas; sua flexibilidade é frágil nas folhas e nos galhos diminuídos, mas crescente em resistência e nunca abandonando a continuidade, na medida em que os galhos se confundem com o tronco, que por sua vez se espalha sob sua base no sistema de raízes, que prevê sua fundação e conexão com o solo.”

4.1 Modelamento das Conexões Viga-Pilar de Estruturas Metálicas

Antes de se aprofundar no estudo do tipo de formulação e modelagem do comportamento da conexão semi-rígida, é de vital importância introduzir algumas definições dos elementos básicos que compõem a ligação viga-pilar, de forma a deixar clara a função e o papel que cada termo representa.

Assim, tem-se a definição dos elementos básicos que compõem a ligação viga-pilar retirado de Kirby et al. (1996).

- nó : ponto de interseção dos eixos médios de dois ou mais membros;
- meio de ligação : é o componente físico que mecanicamente fixa a(s) viga(s) e o(s) pilar(es), é usualmente concentrado no local onde ocorre a ação fixadora.
- zona nodal : delimita a área do nó e do comprimento adjacente dos membros onde as deformações locais são influenciadas pela interação existente.
- conexão (ligação) : é representada pelo meio de ligação e pela zona correspondente à interação entre dois membros quaisquer;

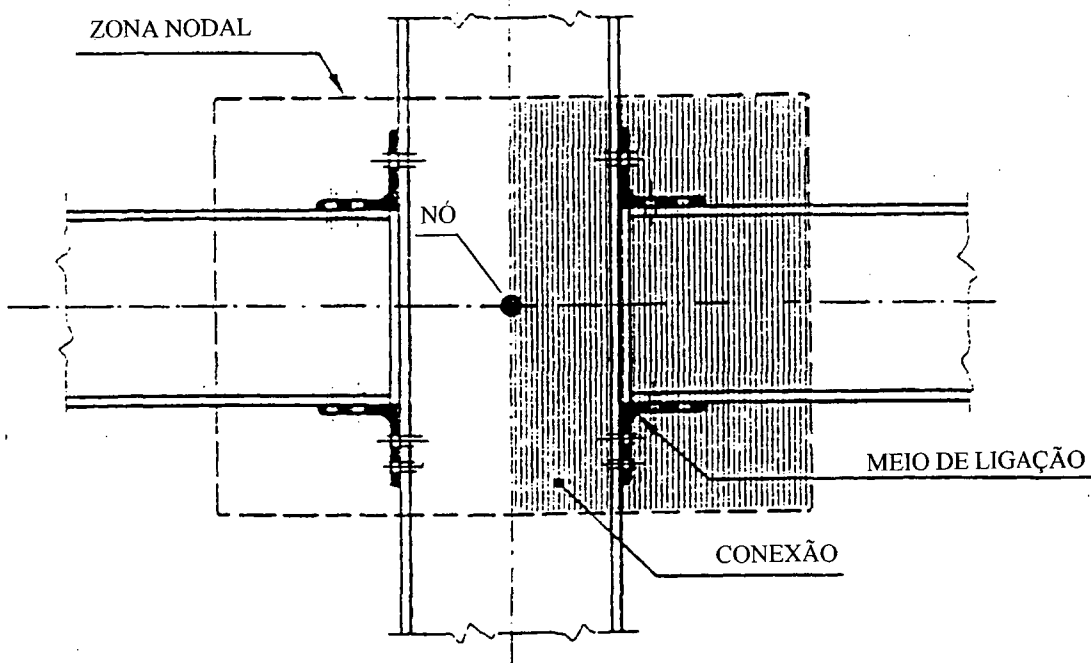


FIGURA 4.1 – Identificação dos elementos básicos de uma ligação viga-pilar, retirado de Kirby et al (1996).

A concepção estrutural das ligações entre viga-pilar de pórticos planos formados de aço estrutural, conforme visto anteriormente, divide as ligações em três principais grupos: rígidas, semi-rígidas e articuladas.

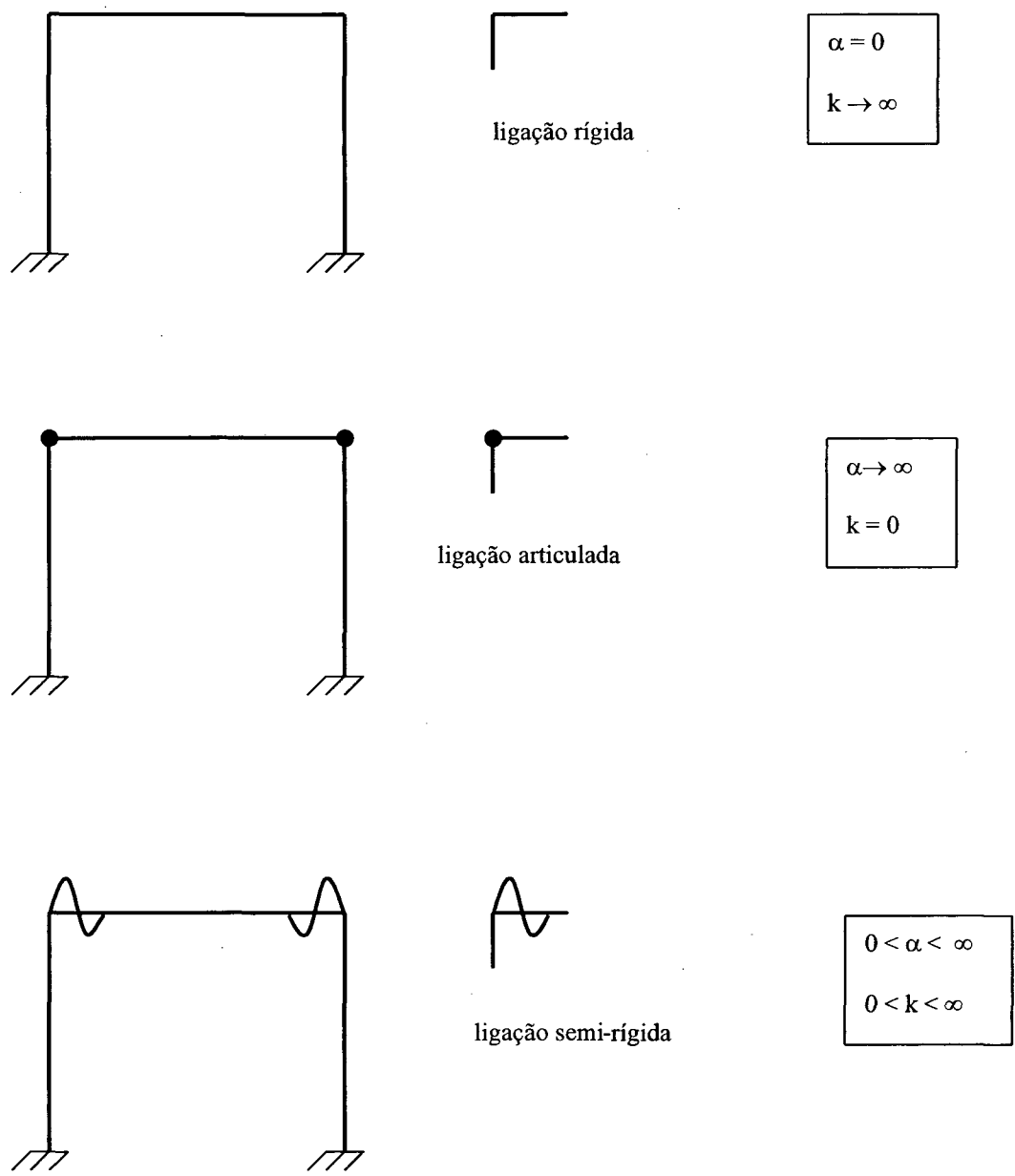


FIGURA 4.2 – Classificação e convenção dos três grupos de ligação viga-pilar.

As ligações semi-rígidas podem ainda ser classificadas em dois sub-grupos:

1. Elementos com “molas” nas extremidades de viga e pilar.

Neste caso, a flexibilidade da conexão é subdividida proporcionalmente para a viga e pilar.

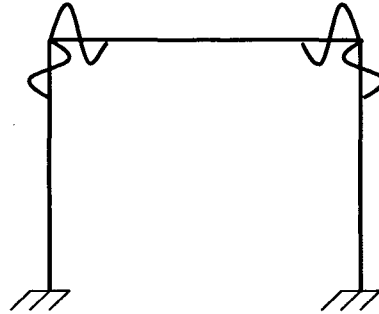


FIGURA 4.3 – Modelagem para “molas” aplicadas na viga e pilar de um pórtico plano.

2. Elementos com “molas” nas extremidades de vigas somente;

Este tipo de ligação semi-rígida concentra a rigidez da ligação somente no elemento-viga, considerando os pilares contínuos ao longo da estrutura.

Normalmente, este tipo de modelagem é a mais utilizada pelos projetistas.

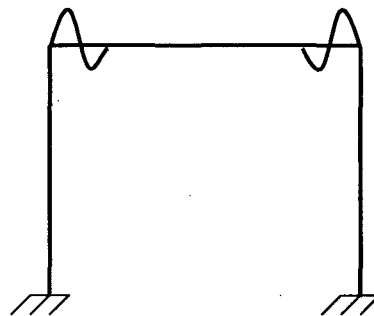


FIGURA 4.4 – Modelagem para “mola” aplicada somente na viga de um pórtico plano.

Todavia, existe ainda mais uma peculiaridade no tipo de modelagem, dependendo de a viga interceptar a coluna pelo eixo de maior ou de menor inércia. A figura 4.5, retirada de Kirby et al (1996), mostra uma classificação de vários tipos de arranjos que a viga forma com o pilar.

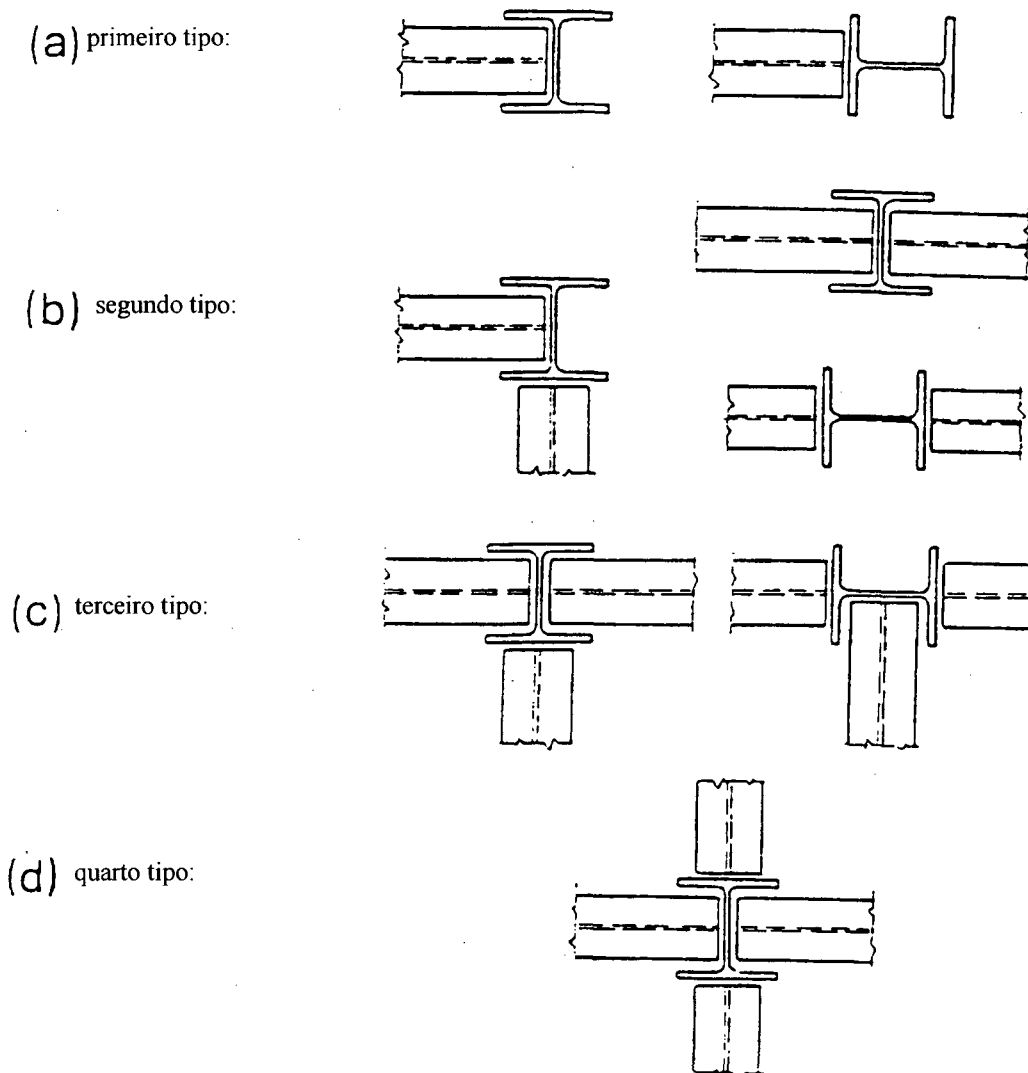


FIGURA 4.5 – Tipos de arranjos das ligações entre viga e pilar, retirado de Kirby et al (1996).

O comportamento da zona nodal é de fundamental importância na análise da conexão. É pertinente identificar o tipo de construção considerada. É conhecido que, sob tensões, a deformação da região do nó ocorre pela acumulação dos deslocamentos dos componentes individuais: viga, coluna e conexão. O comportamento geral da conexão pode ser bastante diferente e influenciável, dependendo de como a viga intercepta a coluna, pelo maior ou menor eixo.

Existem, principalmente, dois tipos de arranjos das conexões viga-pilar, conhecidos como eixos fortes e eixos fracos.

A conexão viga-pilar para eixos fortes apresenta a extremidade da seção da viga conectada com a(s) flange(s) do pilar, causando momento no pilar em relação ao principal eixo.

No eixo fraco da conexão viga/pilar, a extremidade da seção da viga é conectada diretamente na alma do pilar e causa momento no pilar, em relação ao seu eixo secundário.

Caso as vigas estejam ligadas na alma e na mesa de uma única coluna, a conexão é caracterizada em três dimensões e a deformabilidade é a combinação dos efeitos respectivos aos dois eixos.

Quando uma viga intercepta o eixo principal da coluna, chamadas conexões nos eixos fortes, as informações necessárias sobre o seu comportamento são facilmente obtidas por bibliografia e ensaios experimentais. Porém, para o caso das ligações nos eixos fracos, o conhecimento de como se comporta a ligação se torna bastante precário e a dificuldade aumenta, no caso das conexões tri-dimensionais.

Nota-se que o tipo de disposição de como as vigas são locadas no pilar apresenta grande influência no comportamento da conexão, principalmente em relação aos deslocamentos.

A seguir são apresentados os três tipos de arranjos diferentes em termos de modelagem da conexão entre viga e pilar.

- ✓ a extremidade final da viga está conectada na mesa do pilar:

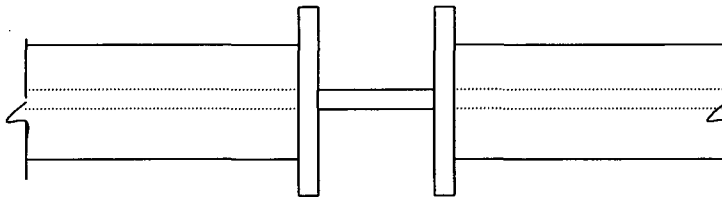


FIGURA 4.6 – Ligação viga-pilar concentrada no eixo forte.

- ✓ a seção transversal da viga está conectada diretamente na alma do pilar:

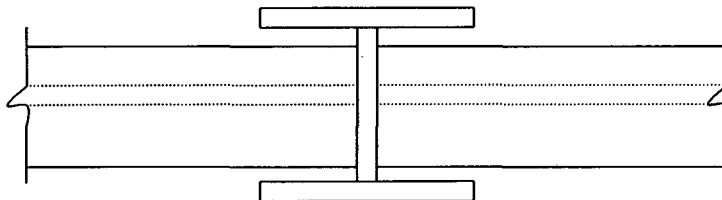


FIGURA 4.7 – Ligação viga-pilar concentrada no eixo fraco.

- ✓ caso das vigas estejam conectadas simultaneamente na mesa e na alma do pilar, tem-se, conforme a figura a seguir:

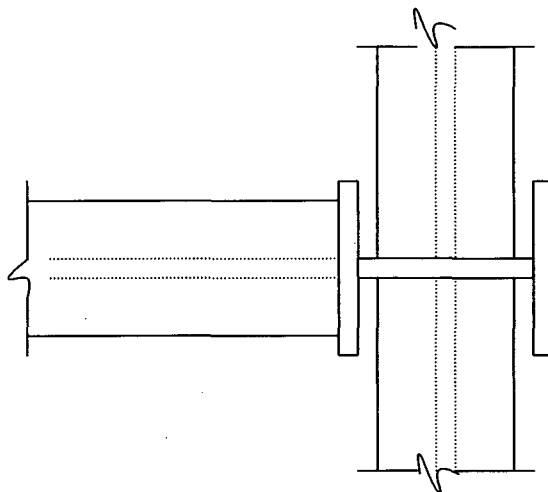


FIGURA 4.8 – Ligação viga-pilar tridimensional

Como as ligações podem ser feitas nas mesas ou almas dos pilares, nota-se, em termos da idealização da modelagem da conexão viga-pilar, dois modelos distintos:

- ✓ Viga conectada na mesa do pilar:

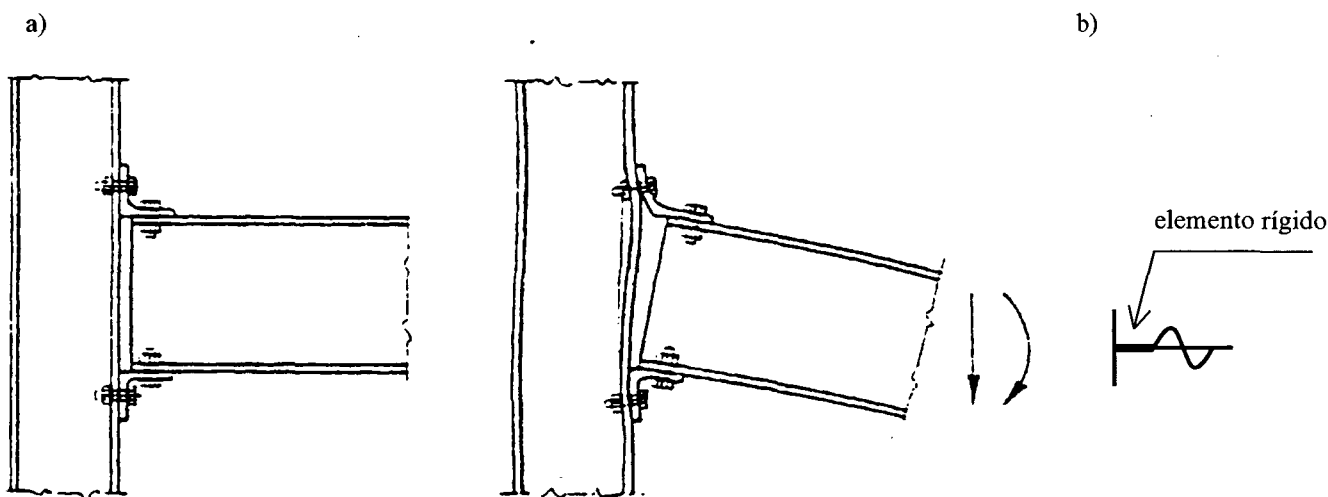


FIGURA 4.9 – Conexão semi-rígida para viga orientada na mesa do pilar, segundo Kirby et al (1996), e modelamento com elemento rígido.

A região da seção do pilar é considerada contínua e compacta, não apresentando deformações ao longo de sua seção transversal. Uma idéia é aplicar um elemento rígido de comprimento de referência, geralmente com valor da metade da profundidade da seção transversal do pilar.

✓ Viga conectada na alma do pilar:

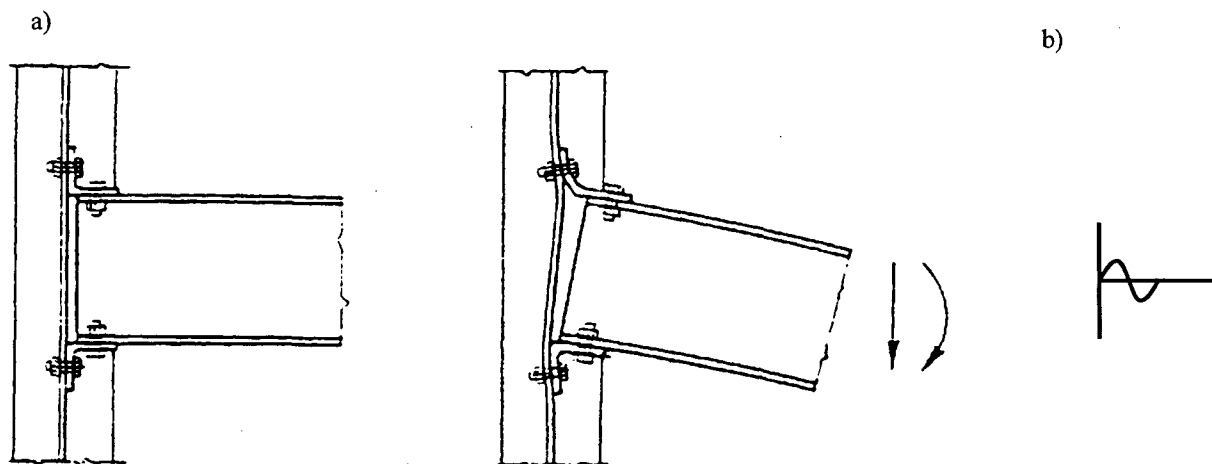


FIGURA 4.10 – Conexão semi-rígida para viga orientada na alma do pilar, segundo Kirby et al (1996), e seu modelamento.

Neste caso, a localização da “mola” é aplicada diretamente no eixo do pilar, ocasionando deslocamentos em toda a região da interação da viga com o pilar.

Contudo, não fará parte do escopo e do objetivo do trabalho um estudo específico do aprimoramento deste modelo.

Geralmente, as ligações semi-rígidas são aplicadas a pórticos com poucos andares. Kishi et al (1996) apresentaram um estudo da utilização de ligações rígidas e semi-rígidas agindo conjuntamente para edifícios altos com o intuito de reduzir os momentos nas conexões. Foram realizados testes com 4 casos diferentes de modelagem do pórticos, variando a posição das “molas” nas conexões viga-pilar.

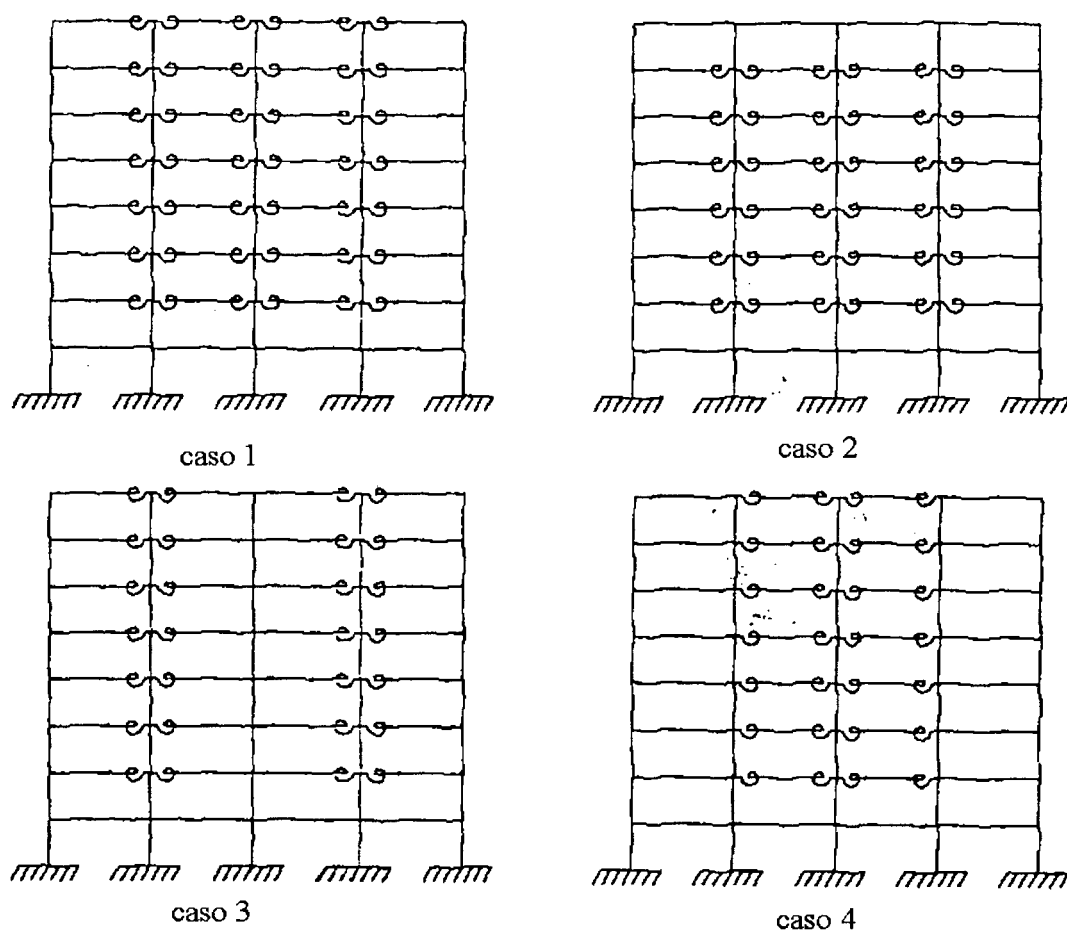


FIGURA 4.11 – Quatro casos de combinação das conexões rígidas e semi-rígidas, retirado de Kirby et al (1996).

As seguintes conclusões foram obtidas no estudo:

- ✓ Para o critério de servicibilidade, em relação ao deslocamento lateral Δ/H menor que 1/400, é respeitado combinando adequadamente ligações rígidas e semi-rígidas e/ou variando os valores da espessura e comprimento das conexões.
- ✓ O caso 4 apresentou a combinação das conexões rígidas e semi-rígidas, com melhor aproveitamento da rigidez das conexões ao longo da estrutura.
- ✓ A combinação das conexões rígidas e semi-rígidas podem ser usadas economicamente no cálculo das estruturas de grande porte.

Ao se elaborar a modelagem da conexão, além do comportamento físico, geométrico e da disposição das molas ao longo da estrutura, outro fator de fundamental importância no cálculo das ligações semi-rígidas é a determinação da rigidez à flexão da conexão a ser utilizada.

Obviamente esta etapa do cálculo é de suma importância num projeto de estruturas metálicas. É a partir da rigidez da conexão à flexão que se baseia todo o

cálculo das ligações semi-rígidas. Este parâmetro porém é de difícil obtenção, sendo dependente do tipo de orientação da viga conectada ao pilar, dos meios e elementos de ligação e das dimensões dos membros e da conexão utilizada. É provavelmente o principal motivo de discriminação do uso das conexões semi-rígidas no projeto de estruturas metálicas.

Com o objetivo de apresentar um cálculo das ligações semi-rígidas simples, prático e com precisão adequada aos resultados, é proposto, conforme apresentado no capítulo três referente à análise elasto-plástica, um método iterativo secante para a obtenção da rigidez à flexão da conexão viga-pilar, através de uma relação simplificada, bi-linear, da relação momento rotação da conexão.

5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Este capítulo apresenta diversos exemplos de pórticos planos com conexões semi-rígidas onde são calculados, analisados e comparados, os resultados em termos de esforços solicitantes e deslocamentos dos nós (rotação e translação).

Procurou-se abordar, na elaboração dos exemplos, os vários aspectos que influenciam a utilização das ligações semi-rígidas no comportamento das estruturas.

A formulação matricial pelo Método dos Deslocamentos apresentada, utilizando os elementos com “molas” nas extremidades através de uma análise não-linear (elasto-plástica) e o método iterativo secante para representar a rigidez à flexão da conexão, foi implementada num programa de pórtico plano na linguagem Visual Basic, apresentado em anexo. Para a análise elasto-plástica perfeita, necessita-se determinar além do coeficiente de flexibilidade inicial α_i (como na análise elástica), o momento plástico da conexão. Existe uma relação de proporcionalidade entre esses dois parâmetros de forma a representar física e adequadamente uma ligação viga-pilar usual metálica.

Para as ligações consideradas mais rígidas, tem-se:

- ✓ coeficiente de rigidez inicial elevado;
- ✓ momento último das conexões alto, próximo ao momento de plastificação dos elementos de barra.

No caso de ligações mais flexíveis, observa-se:

- ✓ pequeno coeficiente de rigidez inicial;
- ✓ capacidade do momento último da conexões relativamente pequeno em relação ao momento de plastificação total dos elementos de barra.

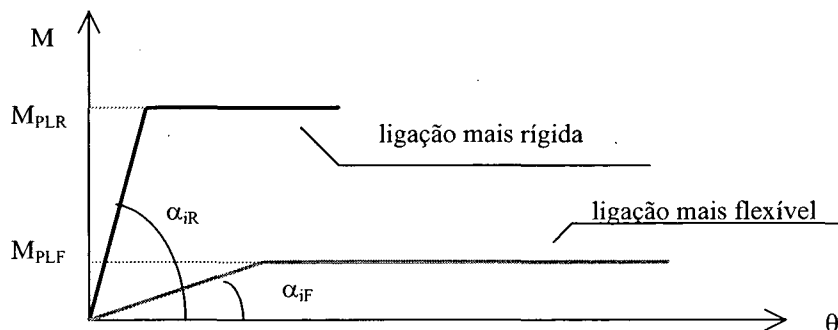


FIGURA 5.1 – Diferenças das ligações consideradas mais rígidas e mais flexíveis em relação ao coeficiente de rigidez inicial e ao momento de plastificação.

Observação: Vide seção 2.1, tipos de ligações, figura 2.11, comportamentos das ligações, segundo Dhillon et al (1989).

Conforme visto no capítulo dois, referente ao comportamento das ligações, o efeito da flexibilidade da conexão é considerado para o seguinte intervalo do coeficiente adimensional α , segundo Ackroyd et al (1981):

$$0,05 < EI/kL < 2,0$$

Como ilustração, tem-se:

- Para valores de α menores que 0,05 ($EI/kL < 0,05$) : a ligação é considerada rígida;
- Para coeficiente de flexibilidade superior a 2,0 ($EI/kL > 2,0$) : a ligação é articulada.

Os valores do coeficiente de flexibilidade adotados na resolução dos exemplos foi escolhido de acordo com o intervalo apresentado.

Em relação ao momento de plastificação da conexão, utilizou-se um critério onde a resolução da estrutura seja determinante em relação às conexões. Para que isso ocorra, dois fatores devem ser respeitados:

1. Os momentos de plastificação das seções de vigas e pilares apresentam valores superiores aos momentos de plastificação das conexões. Imaginando que as conexões sempre plastificam primeiro, concentrando o estudo no seu comportamento.
2. Prioritariamente, que os momentos semi-rígidos obtidos na análise elástica da estrutura apresentam valores superiores aos momentos plásticos das conexões. Acontece, desse modo, uma iteração secante para estimar a nova rigidez a ser considerada na ligação, menor que a anterior. E, assim, sucessivamente para cada ligação da estrutura, até convergir para o momento que a conexão pode suportar, no caso, o momento de plastificação (mostrado detalhadamente no capítulo três, figura 3.34).

O critério adotado para os valores dos momentos de plastificação da conexão está descrito abaixo:

Primeiro passo:

Momento de plastificação da seção transversal das barras:

$$M_{PL} = Z \cdot f_y \quad (5.1)$$

Onde:

M_{PL} – momento de plastificação da seção;

Z – módulo plástico da seção;

f_y – tensão de escoamento do aço estrutural.

O módulo plástico, Z , é assim definido:

Z : soma dos momentos estáticos, produto de uma área pela distância do seu centro de gravidade a um eixo, da seção em relação à Linha Neutra, ou seja:

$$Z = \mu_c + \mu_t \quad (5.2)$$

Onde:

μ_c – momento estático de compressão;

μ_t – momento estático de tração;

Segundo Passo:

De modo a aplicar o modelo de ligações semi-rígidas através de uma análise elasto-plástica a conexão será considerada como fator determinante no critério de dimensionamento, da seguinte forma:

$$\frac{\text{Momento de Plastificação da Seção Transversal}}{\text{Momento de Plastificação da Conexão}} = x \% \quad (5.3)$$

Onde o valor do fator x é dependente do tipo de conexão viga-pilar a ser utilizada.

Exemplo 5.1:

A validade da formulação matricial apresentada é testada e avaliada para os três tipos de ligações: rígida, articulada e semi-rígida. É apresentado, também, um estudo do comportamento das ligações semi-rígidas através de um diagrama momento-rotação da conexão elasto-plástico perfeito.

Descrição dos programas computacionais utilizados para comparação dos resultados:

MATHCAD: editor matemático, utilizando uma formulação matricial pelo método dos deslocamentos, especialmente elaborado para o tipo de estrutura em estudo.

MIX : análise linear elástica matricial pelo Método dos Deslocamentos;

SAP-2000 : programa estrutural comercial, utilizando uma análise pelo Método dos Elementos Finitos;

VISUAL BASIC 5.0: linguagem de programação que foi adotada para a implementação de rotinas semi-rígidas no presente estudo, através de uma análise linear e não-linear matricial pelo Método dos Deslocamentos.

Obs.: os programas Mix e Sap-2000 representam os elementos de pórtico plano somente para o caso de ligações rígidas e articuladas.

Pórtico plano de 3 barras de seções constantes, retas e iguais, apoios bi-engastados, carregamento nos nós e características físicas e geométricas, conforme a figura abaixo:

O coeficiente de flexibilidade elástica, α , foi aplicado somente na viga do pórtico plano.

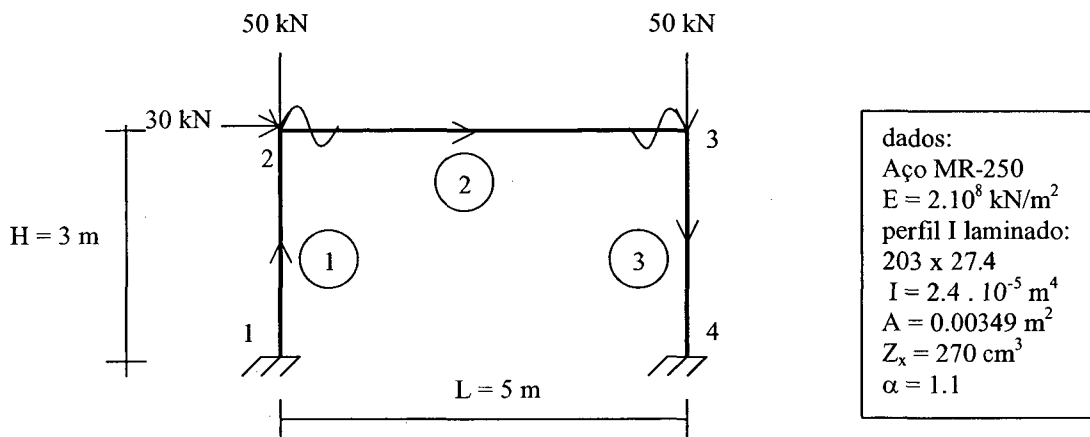


FIGURA 5.2 – Pórtico plano com carregamento nodal e “molas” aplicadas somente na viga.

Dado o pórtico plano, pretende-se simular nos nós livres, 2 e 3, os três tipos de modelos de ligações:

- ligações rígidas : o coeficiente de rigidez à flexão $K \rightarrow \infty$; ($\alpha = 0$)
- ligações articuladas: o coeficiente de rigidez à flexão $K = 0$; ($\alpha \rightarrow \infty$)
- ligações semi-rígidas: o coeficiente de rigidez à flexão varia entre: $0 < K < \infty$;
($0 < \alpha < \infty$)

Os coeficientes adimensionais α devem ser obtidos para cada ligação de canto da seguinte forma:

$$\alpha = \frac{EI}{kL} \quad (5.1.1)$$

Devido à simetria da seção e ligação, os valores dos coeficientes adimensionais do nó 2 e 3 são iguais ($\alpha_{v2} = \alpha_{v3}$).

Os resultados em função dos esforços e deslocamentos serão comparados com os seguintes programas computacionais: MIX e SAP- 2000 e implementados no editor matemático através do MATHCAD 6.0.

Primeiramente, simulando uma ligação rígida: ($K \rightarrow \infty$)

TABELA 5.1 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 com ligações rígidas:

programa	$M_1((kN.m))$	$M_2((kN.m))$	$M_3((kN.m))$	$M_4((kN.m))$
MATHCAD	27,51	17,63	17,55	27,30
MIX	27,51	17,63	17,55	27,30
SAP-2000	27,51	17,63	17,55	27,30
V. B. 5.0	27,51	17,63	17,55	27,30

Diagrama de Momentos Fletores:

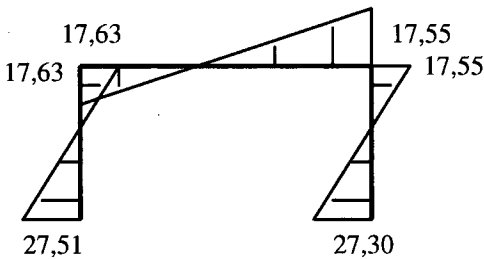


FIGURA 5.3 – Momentos fletores para conexões rígidas.

TABELA 5.2 - Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura com ligações rígidas.

programa	Nó 2			Nó 3		
	$D_{x2}(cm)$	$D_{y2}(cm)$	$Rot_2(rad)$	$D_{x3}(cm)$	$D_{y3}(cm)$	$Rot_3(rad)$
MATHCAD	1,20	$-1,85.10^{-2}$	$-3,1.10^{-3}$	1,2	$-2,45.10^{-2}$	$-3,0.10^{-3}$
MIX	1,17	$-1,85.10^{-2}$	$-3,1.10^{-3}$	1,16	$-2,45.10^{-2}$	$-3,0.10^{-3}$
SAP-2000	1,18	$-1,87.10^{-2}$	$-3,1.10^{-3}$	1,17	$-2,48.10^{-2}$	$-3,1.10^{-3}$
V.B. 5.0	1,17	$-1,85.10^{-2}$	$-3,1.10^{-3}$	1,16	$-2,40.10^{-2}$	$-3,0.10^{-3}$

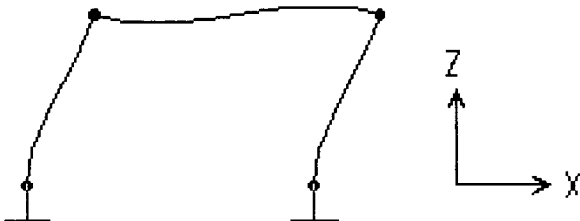


FIGURA 5.4 – Representação da deformada da estrutura para ligações rígidas, retirada do programa SAP- 2000.

Pode-se concluir que os resultados obtidos nas quatro resoluções são semelhantes, pequenas diferenças de arredondamento, tanto para momentos fletores quanto para deslocamentos nodais, validando assim, o cálculo utilizando o programa de pórtico plano Visual Basic, para simular conexões rígidas, fazendo o coeficiente de flexibilidade ser igual a zero.

Representar as ligações de canto do pórtico plano como articuladas: $K = 0$

TABELA 5.3 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 com ligações articuladas:

programa	$M_1((kN.m))$	$M_2((kN.m))$	$M_3((kN.m))$	$M_4((kN.m))$
MATHCAD	45,08	zero	zero	44,91
MIX	45,09	zero	zero	44,91
SAP-2000	45,09	zero	zero	44,91
V. B. 5.0	45,08	zero	zero	44,91

Diagrama de Momentos Fletores:

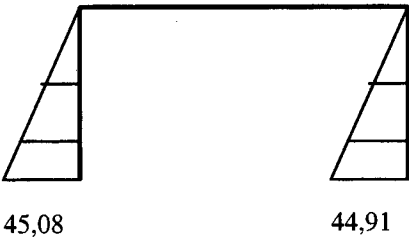


FIGURA 5.5 – Momentos fletores para conexões articuladas.

TABELA 5.4- Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura com ligações articuladas:

programa	Nó 2			Nó 3		
	$D_{x2}(cm)$	$D_{y2}(cm)$	$Rot_{z2}(rad)$	$D_{x3}(cm)$	$D_{y3}(cm)$	$Rot_{z3}(rad)$
MATHCAD	2,8	$-2,15.10^{-2}$	$-1,4.10^{-2}$	2,8	$-2,15.10^{-2}$	$-1,4.10^{-2}$
MIX	2,8	$-2,1.10^{-2}$	$-1,4.10^{-2}$	2,8	$-2,1.10^{-2}$	$-1,4.10^{-2}$
SAP-2000	2,8	$2,2.10^{-2}$	$-1,4.10^{-2}$	2,8	$-2,2.10^{-2}$	$-1,42.10^{-2}$
V.B. 5.0	2,8	$-2,2.10^{-2}$	$-1,4.10^{-2}$	2,8	$-2,2.10^{-2}$	$-1,4.10^{-2}$

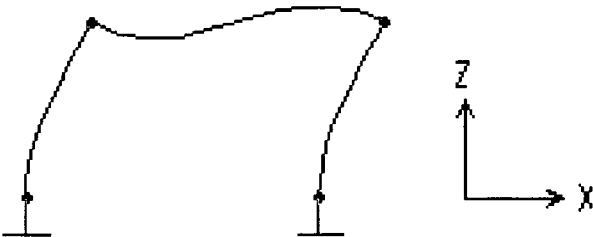


FIGURA 5.6 – Representação da deformada da estrutura para ligações articuladas, retirada do programa SAP- 2000.

Observações:

- os resultados obtidos não apresentam diferenças significativas, mostrando que aplicando um coeficiente de flexibilidade bem alto no programa Visual Basic, simula-se, adequadamente, uma conexão articulada.
- para simular uma articulação na barra 2 do pórtico plano, adotou-se uma inércia bem pequena, aproximadamente zero, nos programas SAP-2000 e MIX.
- quanto ao diagrama de momentos fletores, verificou-se em relação às ligações rígidas, um acréscimo significativo, da ordem de 40 %, nos momentos nos apoios e a eliminação dos momentos na barra 2.
- caso adotasse uma inércia relativamente grande para a viga do pórtico, constatou-se que os momentos de engastamento nos apoios eram os mesmos, devido ao fato da viga apresentar pequenas deformações.

Para uma comparação com ligações **semi-rígidas**, será adotado um valor para o coeficiente de flexibilidade da conexão, $\alpha = 1,1$, de acordo com intervalo de flexibilidades intermediárias, conforme Ackroyd et al (1981):

$$0,05 < \alpha < 2,0.$$

Somente podem ser comparados os programas Mathcad e Visual Basic, devido aos demais não apresentarem o cálculo de ligações semi-rígidas para as conexões.

TABELA 5.5 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 com ligações semi-rígidas:

programa	M ₁ (kN.m)	M ₂ (KN.m)	M ₃ (kN.m)	M ₄ (kN.m)
MATHCAD	37,86	7,24	7,21	37,68
V. B. 5.0	37,86	7,24	7,21	37,68

TABELA 5.6 - Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura com ligações semi-rígidas:

programa	Nó 2			Nó 3		
	D _{x2} (cm)	D _{y2} (cm)	Rot _{z2} (rad)	D _{x3} (cm)	D _{y3} (cm)	Rot _{z3} (rad)
MATHCAD	2,1	-2,0.10 ⁻²	-1,0.10 ⁻²	2,1	-2,3.10 ⁻²	-1,0.10 ⁻³
V.B. 5.0	2,1	-2,0.10 ⁻²	-1,0.10 ⁻³	2,1	-2,3.10 ⁻²	-1,0.10 ⁻³

Diagrama de Momentos Fletores para ligações semi-rígidas: ($\alpha = 1,1$)

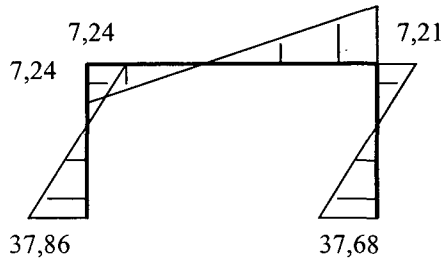


FIGURA 5.7 – Momentos fletores para conexões semi-rígidas.

Constata-se que os valores encontrados para os momentos, nos apoios e nas ligações de canto das conexões semi-rígidas, se enquadram entre os momentos obtidos para ligações rígidas e articuladas. Em referência aos deslocamentos, nota-se a mesma característica que foi observada para os momentos.

Conclusões:

Neste exemplo simples e prático, podem-se retirar algumas conclusões bastante importantes sobre o comportamento das ligações semi-rígidas:

- ✓ apresentam valores dos momentos nas ligações de canto menores em relação às ligações rígidas, porém tais ligações redistribuem momentos ao longo da estrutura para os apoios engastados apresentando valores superiores à ligação rígida citada.
- ✓ apresentam deslocamentos nodais maiores do que as ligações rígidas, porém menores do que as ligações articuladas.
- ✓ para qualquer outro valor do coeficiente adimensional α , os resultados finais estariam no intervalo dos valores obtidos para as ligações rígidas e articuladas.

Para a Análise Elasto-Plástica do pórtico plano, adotou-se o mesmo coeficiente de rigidez elástica inicial $\alpha = 1,1$. Para o mesmo perfil considerado no exemplo anterior, tem-se o seguinte momento de plastificação da seção:

$$M_{PL} = Z_x \cdot f_y = 2,7 \cdot 10^{-4} \cdot 2,5 \cdot 10^5 = 67,5 \text{ kN.m} \quad (5.1.2)$$

Este é o critério adotado para o valor do momento de plastificação da conexão, de tal forma que seja fator limitante na resolução da estrutura:

$$M_{PL\text{conexão}} = 5 \% M_{PL} = 0,05 \cdot 67,5 = 3,37 \text{ kN.m} \quad (5.1.3)$$

Esse tipo de conexão pode ser exemplificada por uma ligação “single web-angle”, sendo normalmente considerada uma conexão articulada. Na figura 5.8, é mostrada a aplicação de um diagrama elasto-plástico à curva real da ligação, obtida experimentalmente ou por modelos numéricos. Esse tipo de processo pode ser estendido, adequada e facilmente, para qualquer tipo de conexão para diferentes curvas momento-rotação não-linear.

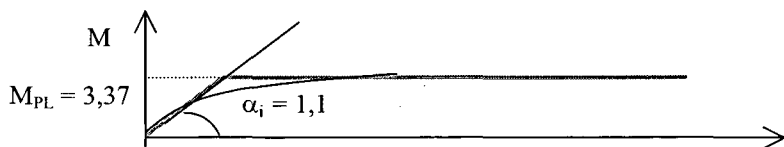


FIGURA 5.8 – Típica conexão “single web-angle” com um diagrama simplificado elasto-plástico através de momento de plastificação e rigidez inicial.

Observa-se que o momento atuante na conexão para $\alpha = 1,1$ supera o momento de plastificação da mesma numa primeira análise elástica da estrutura:

$$\text{Nó 2 : } 7,24 > 3,37 \text{ kN.m.}$$

$$\text{Nó 3 : } 7,21 > 3,37 \text{ kN.m}$$

Dessa forma, o pórtico é resolvido iterativamente através do método secante para um novo valor da flexibilidade da ligação, até convergir ao seu momento plástico. Após 9 iterações, foram obtidos os seguintes momentos e deslocamentos nodais para o pórtico plano:

Momentos fletores nos apoios:

$$M_1 = 41,71 \text{ kN.m}$$

$$M_4 = 41,5 \text{ kN.m}$$

Momentos fletores nas conexões:

$$M_2 = 3,37 \text{ kN.m} = M_3$$

Deslocamentos do nó 2:

$$D_{x2} = 2,5 \text{ cm}$$

$$D_{y2} = -2,09 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

$$\text{Rot}_{z2} = -0,012 \text{ rad}$$

Deslocamentos do nó 3:

$$D_{x3} = 2,49 \text{ cm}$$

$$D_{y3} = -2,2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

$$\text{Rot}_{z3} = -0,012 \text{ rad}$$

O valor encontrado para o coeficiente adimensional resultante para as extremidades 2 e 4 da viga :

$$\alpha_2 = 3,25$$

$$\alpha_4 = 3,23$$

Conclusões:

- Fazendo uma analogia com a análise elástica das ligações semi-rígidas, nota-se claramente um aumento significativo nos momentos do apoio da ordem de 8,0 e 9,2 % para os nós 2 e 3, respectivamente, mostrando o efeito da distribuição dos esforços solicitantes ao longo da estrutura, da conexão para a vinculação do pórtico. Enquanto que para os momentos nas conexões ocorre uma redução mais significativa ainda, média de 53 %.

- Observando a figura 5.8, fica evidente que através de uma simples melhoria na análise elástica, por um processo não-linear elasto-plástico, resulta num comportamento da conexão mais preciso e adequado. Representando, dessa forma, o comportamento da estrutura até o seu estado limite último, no caso de plastificação da conexão.
- Em termos de deslocamentos, as ligações, com momento de plastificação, apresentam valores superiores às ligações com análise elástica. Comparando esses resultados, com os obtidos para as ligações rígidas e articuladas, apresentam-se mais próximos do modelo de ligações articuladas, confirmando a caracterização inicial de uma típica conexão “single web-angle”.
- Os novos coeficientes adimensionais para a viga atestam o decréscimo de rigidez da conexão no regime plástico, para valores crescentes de α .

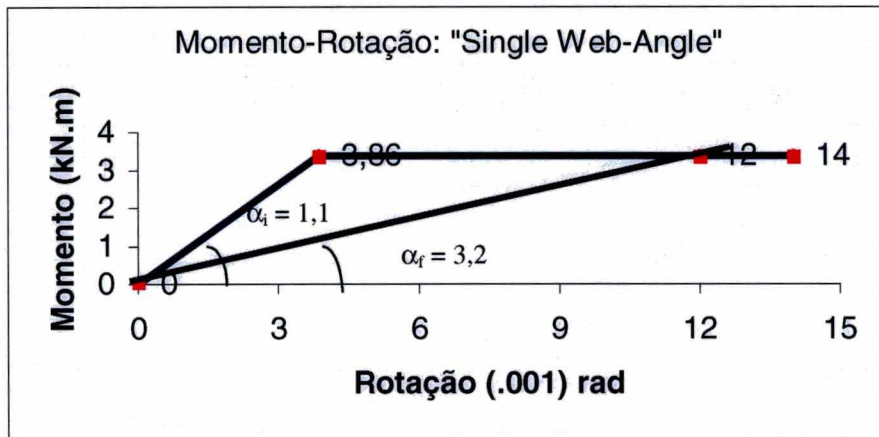


FIGURA 5.9 – Flexibilidade resultante da conexão para o nó 2 no regime plástico.

Com o objetivo de estudar o comportamento das ligações semi-rígidas através de um diagrama elasto-plástico, foram alteradas algumas variáveis na resolução da estrutura.

1º Caso: Carregamento três vezes superior ao anterior e perfil I com maior rigidez para todas as barras do pórtico.

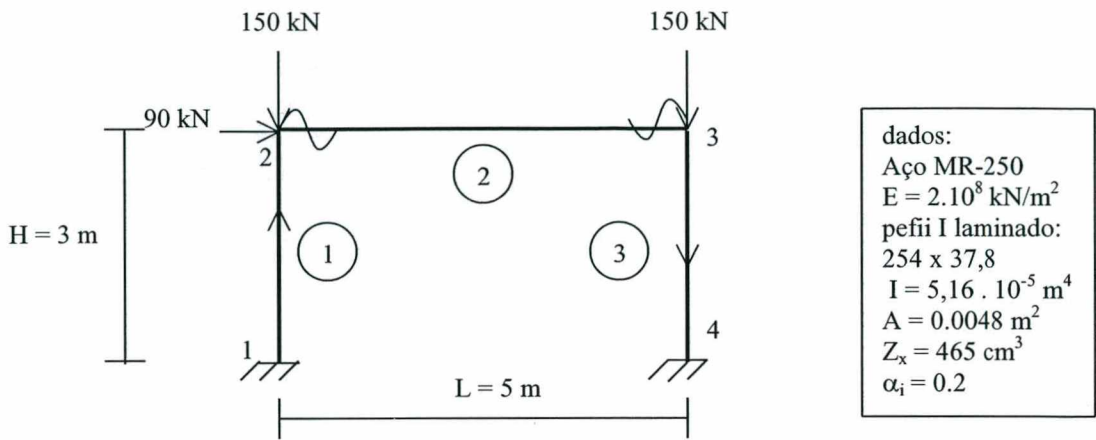


FIGURA 5.10 – Pórtico plano com carregamento nodal três vezes superior e seções mais rígidas com “molas” aplicadas somente na viga.

- Momento de plastificação da seção transversal do perfil:

$$M_{PL} = Z_x \cdot f_y = 4,65 \cdot 10^{-4} \cdot 2,5 \cdot 10^5 = 116,25 \text{ kN.m} \tag{5.1.4}$$

- Critério adotado para o momento de plastificação da conexão:

$$M_{PL\text{conexão}} = 35 \% M_{PL} = 0,35 \cdot 116,25 = 40,69 \text{ kN.m} \tag{5.1.5}$$

Essa ligação pode ser representada por uma usual conexão “header plate”. Está representada na figura abaixo a aproximação de um diagrama elasto-plástico à curva real da ligação.

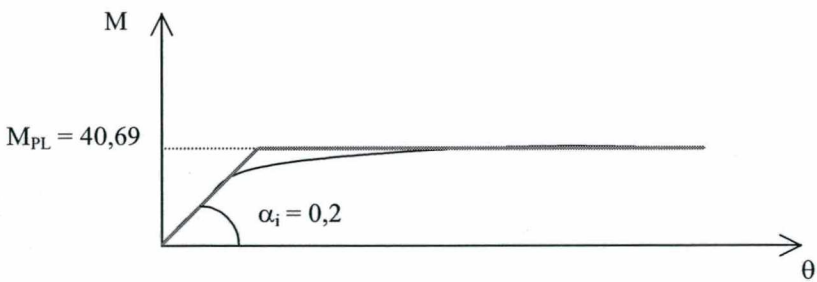


FIGURA 5.11 – Típica conexão “header plate” com um diagrama simplificado elasto-plástico através de momento de plastificação e rigidez inicial.

TABELA 5.7 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 para os dois tipos de análises:

análise	M ₁ (kN.m)	M ₂ (KN.m)	M ₃ (kN.m)	M ₄ (kN.m)
elasto-linear	93,62	41,99	41,71	92,67
elasto-plástica	94,71	40,69	40,69	93,9

TABELA 5.8 - Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura para os dois tipos de análise:

análise	Nó 2			Nó 3		
	D _{x2} (cm)	D _{y2} (cm)	Rot _{z2} (rad)	D _{x3} (cm)	D _{y3} (cm)	Rot _{z3} (rad)
elasto-linear	2,11	-4,16.10 ⁻²	-7,5.10 ⁻³	2,08	-5,21.10 ⁻²	-7,41.10 ⁻³
elasto-plástica	2,16	-4,18.10 ⁻²	-7,85.10 ⁻³	2,14	-5,19.10 ⁻²	-7,73.10 ⁻³

Conclusões:

- As conclusões observadas entre as duas análises são as mesmas que o exemplo anterior:
- ✓ a parcela diferencial dos momentos atuantes em relação aos momentos plásticos das conexões são transferidos para os momentos nos apoios;
- ✓ a análise elasto-plástica apresenta um aumento nos momentos dos apoios da ordem de 1,3 % e uma redução nos momentos fletores das conexões de 3,0 %.
- ✓ a estrutura está sujeita a maiores deslocamentos nodais ao se realizar uma análise elasto-plástica;
- ✓ coeficientes de flexibilidade resultante nas extremidades da viga superiores são, 0,23 e 0,225, respectivamente, porém em menor proporção que o exercício anterior;

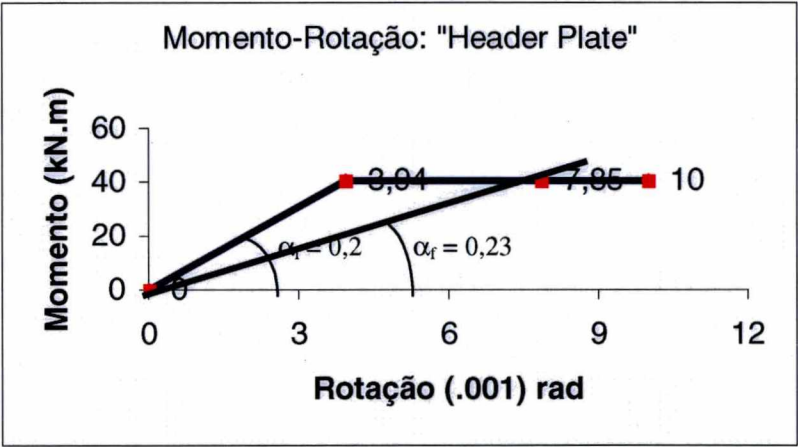


FIGURA 5.12 – Típica conexão “header plate” com um diagrama simplificado elasto-plástico, através de momento de plastificação e rigidez inicial e final para o nó 2.

- Ao se utilizar um perfil mais rígido para suportar cargas maiores, o pórtico plano apresenta um momento de plastificação de suas barras superiores, conseqüentemente, momento de plastificação da conexão maiores, culminando em uma estrutura mais rígida pelo fato de o coeficiente de flexibilidade resultante menor que o obtido no exercício anterior (0,23 < 3,2 respectivamente).

2º Caso: Semelhante ao pórtico plano anterior, porém alterando o coeficiente de flexibilidade elástica α para 1,0, exemplificando uma conexão mais flexível, usualmente considerada como articulada.

Observação: trecho retirado do artigo Bjorhovde et al (1990): “é conhecido que o momento último das conexões “double web-angle”, que são consideradas flexíveis, geralmente estará entre 5 e 15% do momento plástico da viga conectada”. Conforme visto no capítulo dois, esse tipo de conexão é considerada duas vezes mais rígida que a conexão usando apenas uma cantoneira, por isso, foi adotado na primeira análise elasto-plástica desse exemplo o valor de 5 % do momento plástico da seção para o momento de plastificação das ligações “single web-angle”.

- Momento de plastificação da conexão, representando uma típica conexão “double web-angle”, correspondendo a uma porcentagem média de 10 % do momento de plastificação da seção:

$$M_{PLconexão} = 116,25 \cdot 0,10 = 11,62 \text{ kN.m} \quad (5.1.6)$$

Nesse caso particular ocorreu a plastificação dos momentos nos apoios durante a resolução da estrutura:

$$M_1 = 123,8 > 116,25 \text{ kN.m}$$

$$M_4 = 122,9 > 116,25 \text{ kN.m}$$

Como o objetivo do trabalho é concentrar os estudos no comportamento das conexões, será modificado o perfil dos pilares de tal modo que os seus momentos não excedam o momento de plastificação da seção.

Seção dos pilares adotada (mais rígida): I – 305 x 60,7, com as seguintes propriedades:

$$A = 77,4 \text{ cm}^2 ; I_x = 11320 \text{ cm}^4 ; Z_x = 870 \text{ cm}^3$$

Momento de plastificação da seção do pilar:

$$M_{PL} = 2,5 \cdot 10^5 \times 8,7 \cdot 10^{-4} = 217,5 \text{ kN.m} \quad (5.1.7)$$

Após 8 iterações, foram obtidos os esforços solicitantes e deslocamentos resultantes na estrutura:

TABELA 5.9 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 para $\alpha = 1,0$:

análise	M_1 (kN.m)	M_2 (kN.m)	M_3 (kN.m)	M_4 (kN.m)
elasto-linear	123,1	12,89	12,73	121,27
elasto-plástica	124,2	11,62	11,62	122,5

TABELA 5.10 - Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura para $\alpha = 1,0$:

	Nó 2			Nó 3		
análise	D_{x2} (cm)	D_{y2} (cm)	Rot_{z2} (rad)	D_{x3} (cm)	D_{y3} (cm)	Rot_{z3} (rad)
elasto-linear	1,54	$-2,82.10^{-2}$	$-7,3.10^{-2}$	1,52	$-3,02.10^{-2}$	$-7,19.10^{-2}$
elasto-plástica	1,57	$-2,83.10^{-2}$	$-7,5.10^{-3}$	1,54	$-2,83.10^{-2}$	$-7,34.10^{-3}$

Coefficiente de flexibilidade elástica final, relativo ao nó 2 da estrutura:

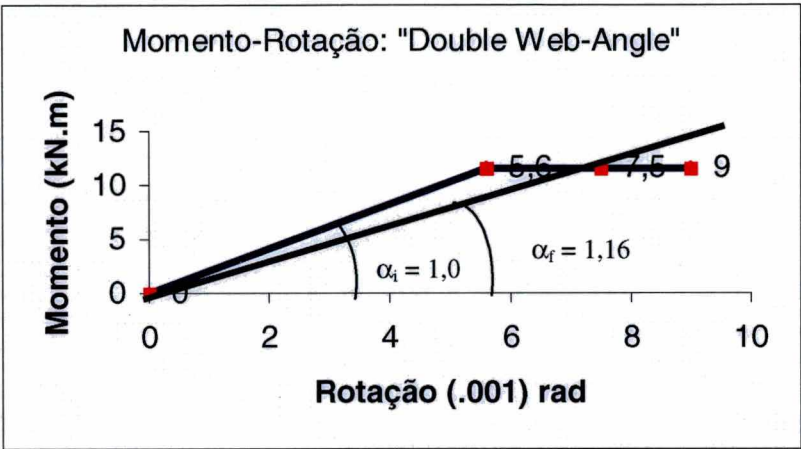


FIGURA 5.13 – Típica conexão “double web-angle” com um diagrama simplificado elasto-plástico através de momento de plastificação e rigidez inicial e final.

Conclusões:

- Comparando os resultados obtidos para as duas análises, as mesmas conclusões dos exemplos anteriores foram observadas. Houve um aumento dos momentos nos apoios da ordem de 1,0 %, enquanto que para as conexões apresentaram uma redução de aproximadamente 9 %.

3º Caso: As variáveis a serem modificadas:

- coeficiente de flexibilidade elástica inicial igual 0,1;
- perfil de viga e pilares diferentes:

perfil I laminado para a viga: 203 x 27,4:

$$A = 34,9 \text{ cm}^2 \ ; \ I_x = 2400 \text{ cm}^4 \ ; \ Z_x = 270 \text{ cm}^3$$

- Momento de plastificação da seção do perfil:

$$M_{PL} = 2,7.10^{-4} \cdot 2,5.10^5 = 67,5 \text{ kN.m} \tag{5.1.8}$$

perfil I laminado para o pilar: 254 x 37,8:

$$A = 48,1 \text{ cm}^2 \ ; \ I_x = 5160 \text{ cm}^4 \ ; \ Z_x = 465 \text{ cm}^3$$

$$M_{PL} = 4,65.10^{-4} \cdot 2,5.10^5 = 116,25 \text{ kN.m} \tag{5.1.9}$$

- Momento de plastificação da conexão, imaginando uma ligação viga-pilar do tipo “Top and Seat Angle”:

$M_{PLconexão} = 50 \% M_{PLviga} = 0,50 \cdot 67,5 = 33,75 \text{ kN.m}$ (5.1.10)

TABELA 5.11 - Momentos fletores nos nós 1,2,3 e 4 para $\alpha = 0,1$:

análise	M ₁ (kN.m)	M ₂ (KN.m)	M ₃ (kN.m)	M ₄ (kN.m)
elasto-linear	101,12	34,6	34,4	99,9
elasto-plástica	101,8	33,75	33,75	100,7

TABELA 5.12 - Deslocamentos nos nós 2 e 3 da estrutura para $\alpha = 0,1$:

análise	Nó 2			Nó 3		
	D _{x2} (cm)	D _{y2} (cm)	Rot _{z2} (rad)	D _{x3} (cm)	D _{y3} (cm)	Rot _{z3} (rad)
elasto-linear	2,44	-4,26.10 ⁻²	-9,67.10 ⁻³	2,4	-5,11.10 ⁻²	-9,5.10 ⁻³
elasto-plástica	2,47	-4,26.10 ⁻²	-9,89.10 ⁻³	2,44	-5,11.10 ⁻²	-9,73.10 ⁻³

Coefficiente de flexibilidade elástica final, após 33 iterações:

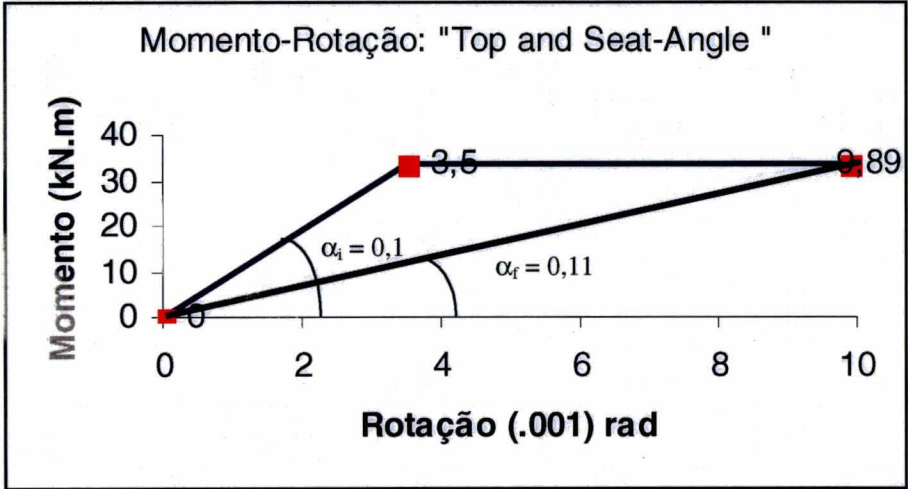


FIGURA 5.14 – Típica conexão “top and seat angle” com um diagrama simplificado elasto-plástico, através de momento de plastificação e rigidez inicial e final para o nó 2.

Conclusões:

- ✓ Apresentando uma conexão com significativo coeficiente de rigidez inicial, os deslocamentos nodais do pórtico são menos expressivos, se comparados com os exemplos utilizando uma análise elasto-plástica;

De uma maneira geral, observou-se nos exemplos apresentados que a utilização de uma análise elasto-plástica do comportamento das conexões pode ser facilmente aplicado às curvas momento-rotação para os diferentes tipos de arranjos viga-pilar metálicos, representando, física e mais adequadamente em relação à análise elástica, o comportamento real das conexões, levando em consideração o momento plástico das mesmas.

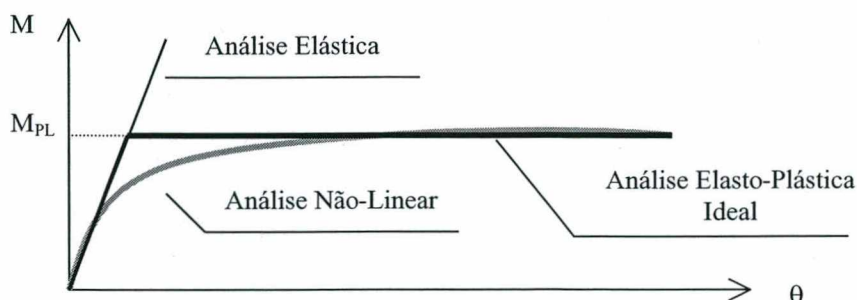


FIGURA 5.15 – Comparação das análises para a representação do comportamento das conexões num diagrama momento-rotação.

Exemplo 5.2:

Analisa-se o comportamento da conexão quando se varia o coeficiente adimensional α , em termos de momento aplicado na ligação semi-rígida e da flecha no meio do vão da viga. Neste exemplo, é utilizado um pórtico plano de madeira com o intuito de comparar os resultados com o artigo “Influência da Rigidez das Ligações no Comportamento de Estruturas de Madeira Laminada Colada”, escrito por Valle et al (1998).

Trata-se de um pórtico plano simétrico, composto por 3 barras prismáticas, engastado na base e submetido a carregamento vertical uniformemente distribuído ao longo da viga. De acordo com a figura, estão representadas a geometria do pórtico e a identificação dos nós e dos elementos. Aplicou-se o coeficiente adimensional α na viga e no pilar.

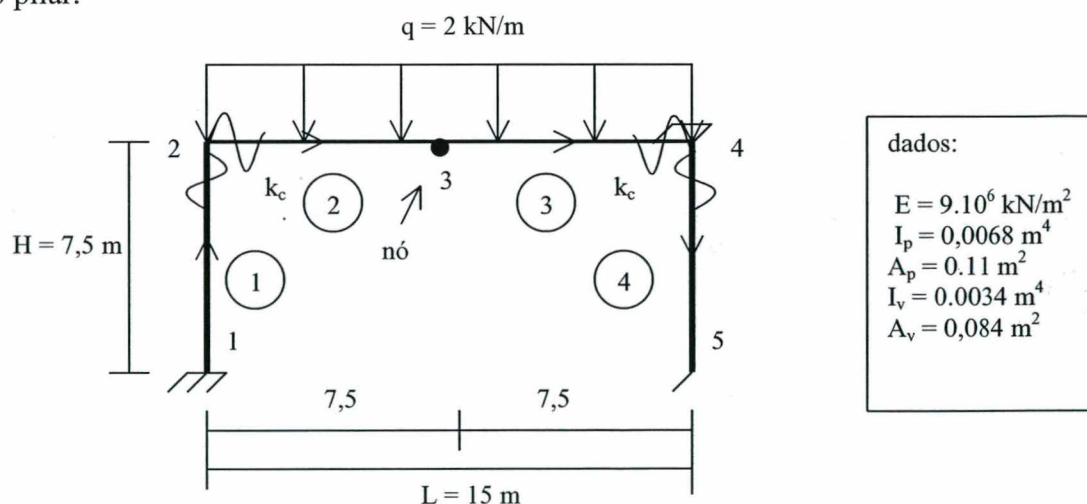


FIGURA 5.16 – Pórtico plano com carregamento uniformemente distribuído com conexões semi-rígidas.

Os valores da rigidez à flexão da conexão são arbitrados dentro do intervalo para $k = 0$ (ligação articulada) e $k \rightarrow \infty$ (ligação rígida).

Em termos de coeficiente adimensional α das ligações nos nós 2 e 4, são compostas do coeficiente α_v da viga e α_p do pilar.

Os coeficientes adimensionais de flexibilidade α para cada elemento da ligação, são: (inversamente proporcional a k):

$$\text{- viga:} \quad \alpha_v = \frac{EI_v}{k_c L_v} \quad (5.2.1)$$

$$\text{- pilar :} \quad \alpha_p = \frac{EI_p}{k_c L_p} \quad (5.2.2)$$

Obtém-se uma relação entre os coeficientes adimensionais dos elementos de ligação, dividindo os termos:

$$\alpha_p = 2 \alpha_v \quad (5.2.3)$$

TABELA 5.13 – Momento e flecha na estrutura em termos do coeficiente adimensional da viga, α_v :

α_v	M_2 (kN.m)	f_3 (cm)	M_2/M_{rig} (kN.m)	f_3/f_{rig} (cm)
0	32,09	1,36	1,0	1,0
1/22	29,77	1,57	0,93	1,15
1/18	29,30	1,61	0,91	1,18
1/14	28,6	1,67	0,89	1,23
1/10	27,4	1,78	0,85	1,31
1/6	24,94	2,00	0,78	1,47
1/2	17,27	2,70	0,54	1,99
articulada	0	4,31	0	3,17

Estes valores refletem exatamente os resultados obtidos em Valle et al (op.cit).

A primeira coluna representa os valores dos coeficientes adimensionais arbitrados e os momentos no nó 2 estão listados na coluna dois . A flecha mostrada na coluna três refere-se ao nó 3, localizado no meio da viga do pórtico. Nas colunas subseqüentes, estão apresentados os valores semi-rígidos, comparados com os resultados da primeira linha, caso considerassem como ligações rígidas. Nota-se que as pequenas variações de α influenciam significativamente os momentos e deslocamentos na estrutura.

Msr x coeficiente de flexibilidade

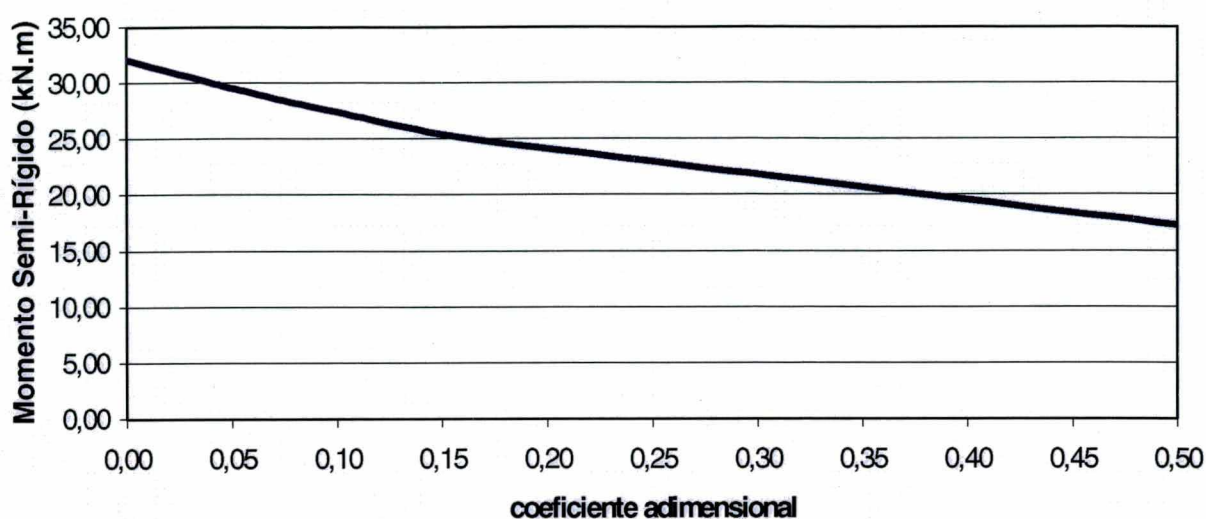


FIGURA 5.17 – Gráfico mostrando o comportamento da conexão viga-pilar, em termos de momento fletor ao variar sua flexibilidade.

Flecha x coeficiente de flexibilidade

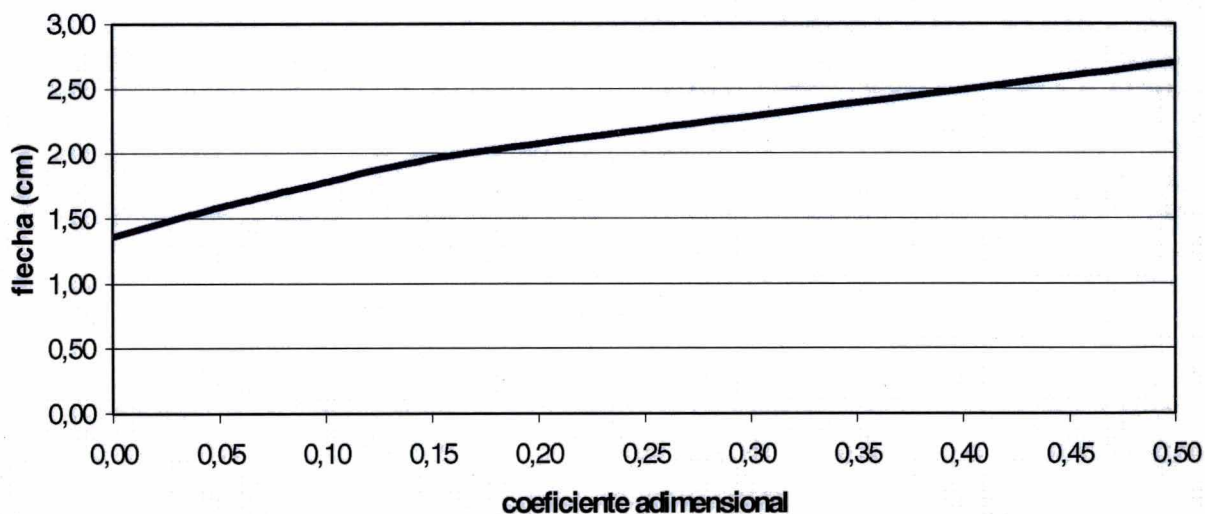


FIGURA 5.18 - Comportamento da conexão em termos da flecha no meio do vão da viga, ao variar o coeficiente adimensional α .

O primeiro gráfico mostra como se comporta o coeficiente de flexibilidade adimensional pelo momento aplicado na ligação. Observa-se que, para valores crescentes de α , ou seja, menor rigidez à flexão k da conexão, são inversamente proporcionais aos valores dos momentos na ligação, caracterizando menor resistência ao momento fletor na ligação viga-pilar, redistribuindo estas diferenças de momentos ao longo da estrutura.

Verifica-se, no segundo diagrama, que o coeficiente de flexibilidade α da conexão é diretamente proporcional à flecha no meio do vão da viga, tornando a estrutura mais sensível às deformações.

Exemplo 5.3:

Através de dois tipos diferentes de modelagens para o elemento de conexão semi-rígida, os resultados são comparados em termos dos momentos e dos deslocamentos rotacionais nos nós da estrutura.

Dado um pórtico plano, de acordo com a figura abaixo, retirado de Li et al (1993), que considera o elemento de conexão independente, será analisado e comparado com a modelação de elementos com molas nas extremidades, em termos de momentos na estrutura, bem como deslocamentos rotacionais nos nós livres.

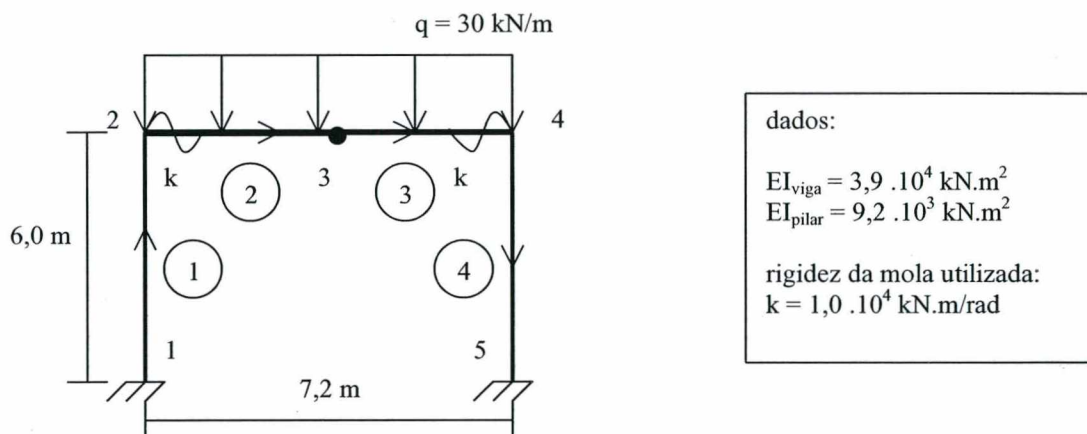


FIGURA 5.19 – Pórtico plano bi-engastado, com carregamento uniformemente distribuído com “molas”, somente no elemento viga.

Algumas observações adicionais na modelagem do exercício utilizando o programa Visual Basic 5.0 são apresentadas a seguir:

- desconsiderou-se a deformação pelo esforço normal, ou seja, adotou-se uma área da seção transversal relativamente grande;
- aplicação de “molas” somente nas extremidades dos elementos de viga.

No artigo, Li et al (op.cit), utilizaram o elemento de conexão agindo independentemente e desprezou o comprimento do elemento de conexão na sua aplicação.

Estes são os resultados dos momentos e deslocamentos rotacionais fornecidos por Li et al (1993):

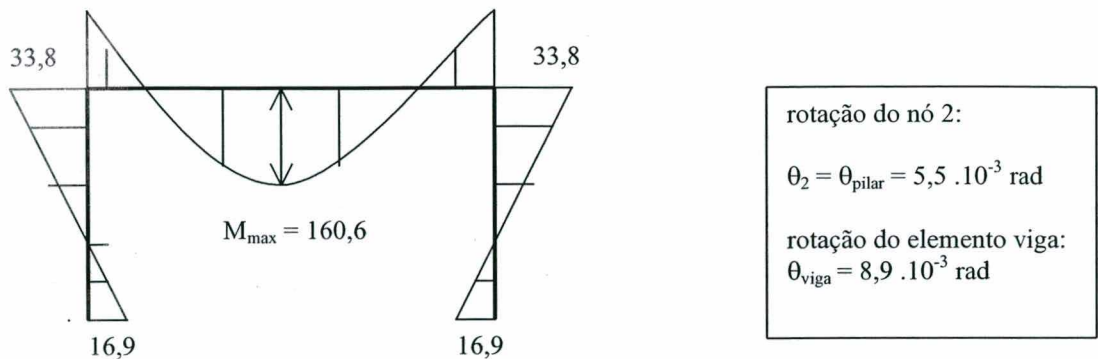


FIGURA 5.20 – Momentos fletores fornecidos pelo artigo.

Em se tratando do coeficiente de flexibilidade elástica α da viga, tem-se :

$$\alpha_v = \frac{EI_{viga}}{kL} = \frac{3,9.10^4}{1,0.10^4.7,2} = 0,54 \tag{5.3.1}$$

Estes são os resultados dos momentos fletores (unidades: kN.m) fornecidos pelo programa Visual Basic, utilizando o elemento de barras com “molas” nas extremidades da viga para os três tipos de modelos de conexão: rígida, semi-rígida e articulada.

TABELA 5.14 – Momentos fletores na estrutura nos três modelos de conexão:

modelo de ligação:	rígida	semi-rígida	articulada
momento na ligação viga-pilar:	46,85	33,7	0
momento máximo da viga (meio do vão):	147,55	160,7	194,40
momento no apoio:	23,43	16,8	0

Deslocamentos rotacionais no nó livre 2:

Rotação do nó 2 do pórtico plano: $\theta_2 = 5,49 . 10^{-3}$ rad

A seguir, estão plotados os diagramas de momentos fletores na estrutura com conexões semi-rígidas com “molas” nas extremidades de viga somente, $\alpha_v = 0,54167$, resolvida no programa Visual Basic, com sua respectiva comparação percentual aos resultados obtidos no artigo:

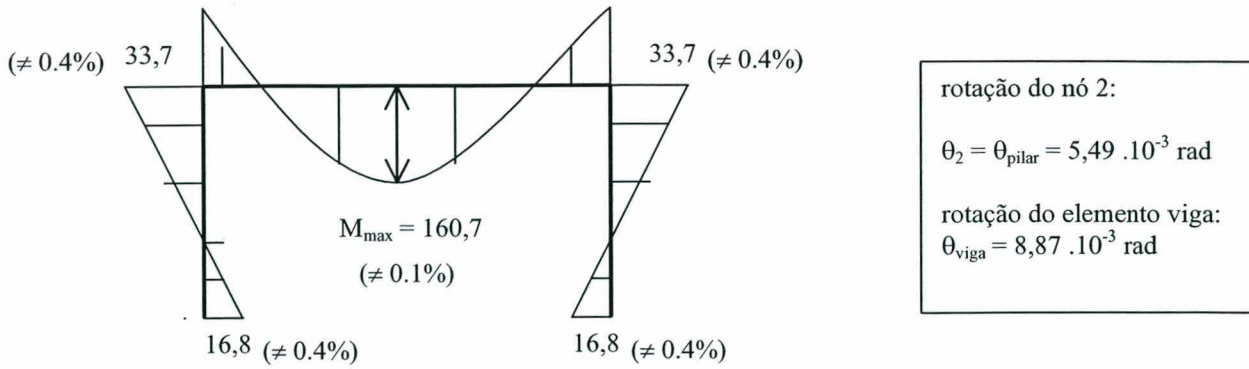


FIGURA 5.21 – Momentos fletores fornecidos pelo programa Visual Basic.

É apresentado na figura 5.22, como é obtido o cálculo da rotação do elemento viga.

Deformada da estrutura para obtenção da rotação da viga:

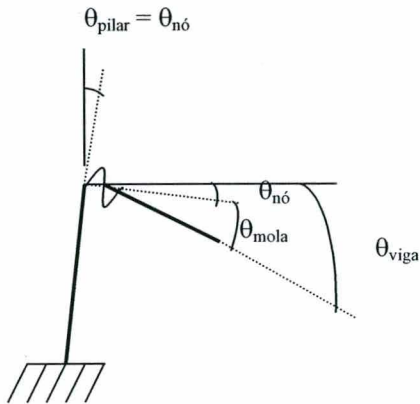


FIGURA 5.22 – Componentes de distorção dos elementos e da conexão da estrutura.

De acordo com a figura acima, tem-se:

$$\theta_{\text{viga}} = \theta_{\text{nó}} + \theta_{\text{mola}} \quad \therefore \theta_{\text{mola}} = \frac{M_{SR}}{k_c} = \frac{33,7}{10^4} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad (5.3.2)$$

$$\theta_{\text{viga}} = 5,5 \cdot 10^{-3} + 3,37 \cdot 10^{-3}$$

$$\theta_{\text{viga}} = 8,87 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Conclusão:

Verifica-se que os resultados obtidos, utilizando as duas formulações para simular a flexibilidade da conexão, são bastante semelhantes. Ocorrem pequenas diferenças nos momentos, da ordem de 0,5 %, e os valores dos deslocamentos rotacionais com precisão de uma casa decimal se equivalem.

Nota-se, na tabela de comparação dos momentos fletores para os três modelos de conexão de um pórtico plano com carga uniformemente distribuída ao longo da viga, que:

- Momentos máximos na metade do vão da viga:

$$M_{\text{rig.}} < M_{\text{semi-rig.}} < M_{\text{articulada}}$$

- Momentos na ligação viga-pilar:

$$M_{\text{rig.}} > M_{\text{semi-rig.}} > M_{\text{articulada}}$$

- Momentos no apoio:

$$M_{\text{rig.}} > M_{\text{semi-rig.}} > M_{\text{articulada}}$$

As conexões rígidas caracterizam-se por apresentar momentos fletores inferiores na viga em relação aos outros modelos, porém os seus momentos na ligação e no apoio são maiores. Já as conexões articuladas possuem momentos fletores na viga superiores enquanto na ligação são nulos e, no apoio, são relativamente pequenos (nesse caso nulos). Os resultados obtidos na conexão semi-rígida são intermediários aos modelos de conexão usuais, redistribuindo essas diferenças residuais ao longo da estrutura.

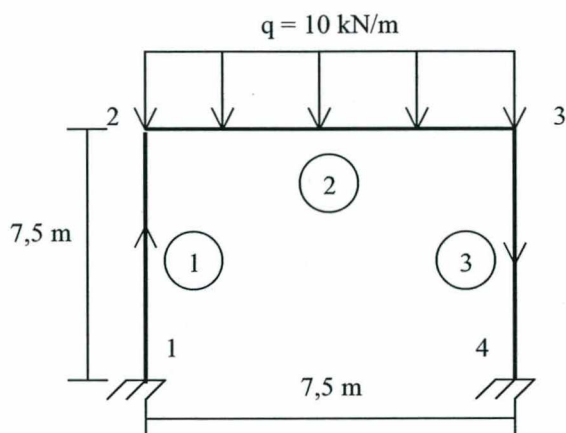
Realça-se a idéia de que não importa o tipo de modelagem da conexão que o projetista está utilizando para representar ligações semi-rígidas, seja ela pelo elemento de conexão independente, ou por elementos com molas na extremidades. Os valores encontrados, tanto para esforços (momentos fletores), ou para deslocamentos (rotações), não influenciam no resultado final da resolução do pórtico plano. Obviamente, o tipo de implementação e a modelagem da conexão são diferentes. O que está se comparando é a validade das duas concepções do efeito da flexibilidade da ligação viga-pilar.

Exemplo 5.4:

Um pórtico plano bi-engastado de 3 barras prismáticas, de mesma seção transversal, com carregamento uniformemente distribuído ao longo da viga, é apresentado. A rigidez da conexão pode ser modelada para dois casos:

- “molas” nas extremidades dos elementos viga e pilar;
- “molas” nas extremidades de vigas somente;

Como se deve distribuir esta rigidez ao longo da estrutura, é objeto de análise que caracteriza este exemplo.



dados:

$$E_{\text{estr.}} = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

Aço MR-250 \equiv ASTM A36
perfil I – padrão americano -
254 x 7,9 :

$$A = 48,1 \text{ cm}^2$$

$$I_x = 5140 \text{ cm}^4$$

rigidez da mola utilizada:

$$k = 8208 \text{ kN.m/rad}$$

FIGURA 5.23 – Pórtico plano de três elementos, com carregamento uniformemente distribuído.

Caso a:

A rigidez da ligação de canto é composta pela rigidez dos elementos interceptados. Na realidade, o que existe fisicamente é a rigidez da ligação $k = 8208 \text{ kN.m/rad}$, sendo que será feita uma distribuição relativa e proporcional para a viga e pilar.

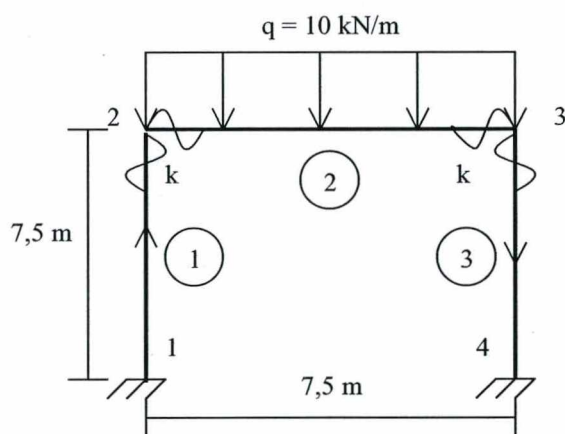


FIGURA 5.24 – Pórtico plano com aplicação das “molas” na viga e pilar.

Para aplicação no programa Visual Basic, tem-se, em termos do coeficiente adimensional para a viga e pilar:

$$\alpha_{\text{ligação}} = \frac{EI}{kL} = \frac{2 \cdot 10^8 * 5140 \cdot 10^{-8}}{8208 * 7,5} = 0,167 \quad (5.4.1)$$

$$\alpha_{\text{ligação}} = \alpha_{\text{viga}} + \alpha_{\text{pilar}} \quad \therefore \quad \alpha_{\text{viga}} = \alpha_{\text{pilar}} \quad \therefore \quad \alpha_{\text{ligação}} = 2\alpha_{\text{elemento}} \quad (5.4.2)$$

$$\therefore \quad \alpha_{\text{elemento}} = \frac{\alpha_{\text{ligação}}}{2} = \frac{0,167}{2} = 0,0835$$

Deve-se notar que o coeficiente α não é obtido diretamente da fórmula para a viga e o pilar, pela metade da rigidez da conexão, o que resultaria em um valor errôneo e superestimado dos deslocamentos rotacionais.

Momento semi-rígido na ligação de canto:

$$M_{SR} = 25,56 \text{ kN.m}$$

Rotação do nó livre 2, da ligação:

$$\theta_2 = 6,22 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

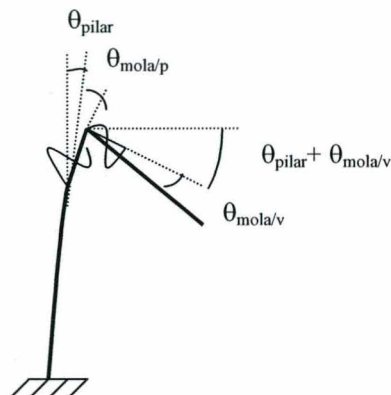


FIGURA 5.25 – Configuração deformada ampliada da conexão viga-pilar para “mola” nos elementos interceptados.

Determinação da rotação do pilar, θ_{pilar} :

$$\theta_{nó} = \theta_{pilar} + \theta_{mola/p} \therefore \theta_{pilar} = \theta_{nó} - \theta_{mola/p} \therefore \quad (5.4.3)$$

$\therefore \theta_{mola}$:

$$\theta_{mola} = \frac{M_{SR}}{k} = \frac{25,56}{8208} = 3,11 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \therefore \theta_{mola/pilar} = \theta_{mola/viga} = \frac{\theta_{mola}}{2} = \frac{3,11 \cdot 10^{-3}}{2} = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_{pilar} = 6,22 \cdot 10^{-3} - 1,56 \cdot 10^{-3} = 4,66 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Determinação da rotação da viga, θ_{viga} :

$$\theta_{viga} = \theta_{nó} + \theta_{mola/viga} \therefore \quad (5.4.4)$$

$$\theta_{viga} = 6,22 \cdot 10^{-3} + 1,56 \cdot 10^{-3} = 7,77 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Caso b :

A mola é aplicada somente no elemento viga, ou seja, considera o pilar contínuo.

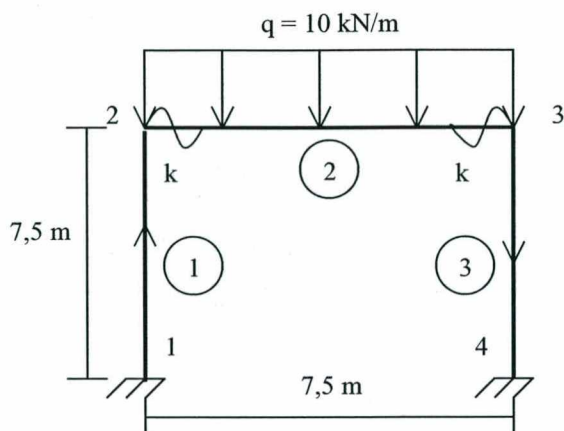


FIGURA 5.26 – Pórtico plano com aplicação das “molas” somente na viga.

- coeficiente de rigidez da conexão, k , igual a 8208 kN.m/rad
- respectivo coeficiente adimensional de flexibilidade elástica, α_{viga} :

$$\alpha_{\text{ligação}} = \frac{EI}{kL} = \frac{2 \cdot 10^8 * 5140 \cdot 10^{-8}}{8208 * 7,5} = 0,167 \quad (5.4.5)$$

Resultados do programa Visual Basic, momentos fletores e rotação do nó 2, respectivamente:

$$M_{SR} = 25,55 \text{ kN.m}$$

$$\theta_2 = 4,66 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

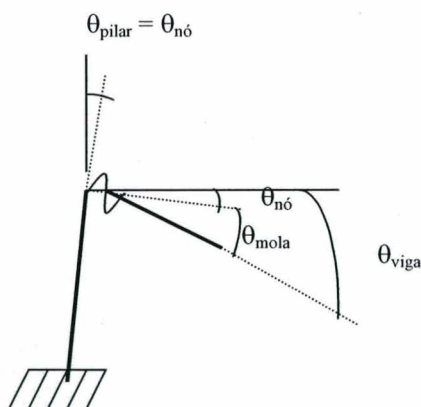


FIGURA 5.27 – Configuração deformada ampliada da conexão viga-pilar para “mola” na viga.

- Determinação da rotação do pilar, θ_{pilar} :

$$\theta_{\text{pilar}} = \theta_{\text{nó}} = 4,66 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

- Determinação da rotação da viga, θ_{viga} :

$$\theta_{\text{viga}} = \theta_{\text{nó}} + \theta_{\text{mola}} \quad \therefore \quad (5.4.6)$$

$$\therefore \theta_{\text{mola}} = \frac{25,55}{8208} = 3,11 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \therefore$$

$$\therefore \theta_{\text{viga}} = 4,66 \cdot 10^{-3} + 3,11 \cdot 10^{-3} = 7,77 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Conclusões do tipo de modelamento da conexão utilizado:

- ✓ Quando se aplicam “molas” nas extremidades de vigas e pilares para representar a rigidez da ligação, constata-se:
 - O ângulo rotacional do pilar é composto pelo ângulo da mola e do nó, com sentidos contrários;
 - O valor do coeficiente α para cada elemento da ligação é proporcionalmente distribuído de forma a representar o valor da rigidez real da ligação;
 - Deve-se ficar bem claro que fisicamente o que existe é a rigidez da ligação à flexão. O que se pretende é simular esta rigidez proporcionalmente aos elementos interconectados, tomando sérios cuidados com seus valores.
- ✓ A modelagem de aplicação da flexibilidade somente nas vigas representa, adequada e fisicamente, o comportamento das conexões em ensaios e na prática;
- ✓ Considera-se, assim, que os pilares são elementos contínuos. Este procedimento é usualmente utilizado em projetos estruturais.

Exemplo 5.5:

Um pórtico plano bi-engastado, de 9 barras com molas nas vigas e carregamentos laterais de vento, é estudado e analisado para deslocamentos axiais, utilizando uma análise linear elástica semi-rígida para a flexibilidade das vigas e adicionando molas em suas extremidades. Os resultados são analisados e comparados com o artigo UMI, Shi (1990).

São suposições adotadas na análise estrutural:

- pilares são considerados contínuos;
- desprezo das deformações por esforço normal;

A estrutura está discriminada na figura a seguir:

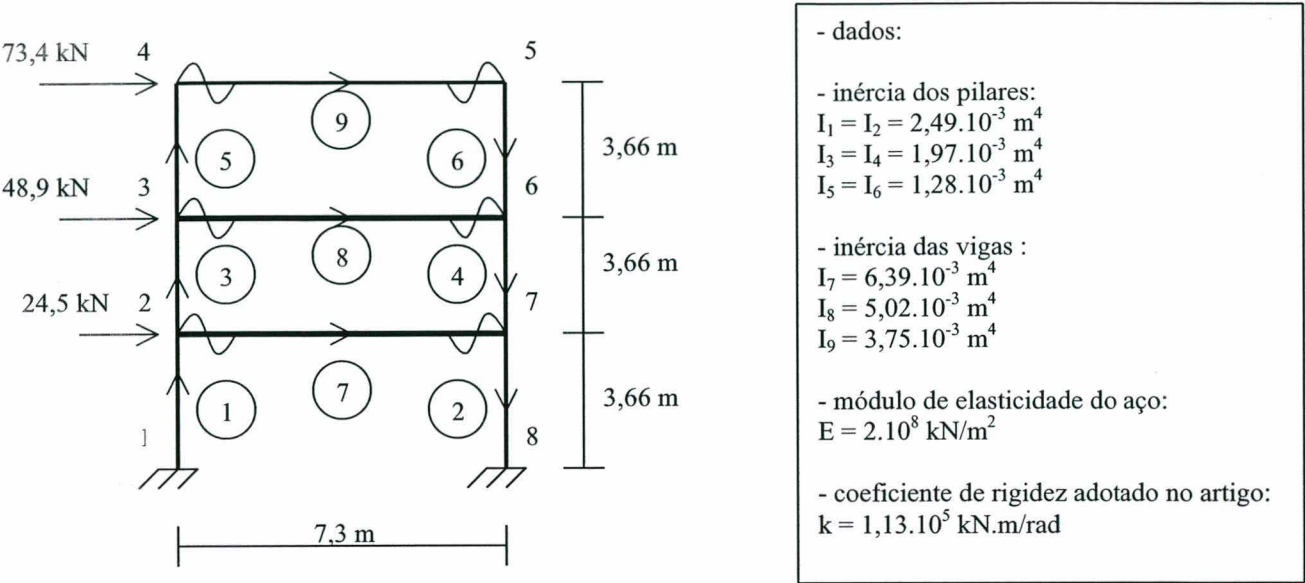


FIGURA 5.28 – Pórtico plano de três andares com carregamento lateral e “molas” aplicadas nas vigas.

De acordo com a rigidez da ligação, com k igual para todas as vigas, tem-se em termos do coeficiente de flexibilidade os seguintes valores:

$$\alpha_7 = \frac{EI_7}{k_c L_7} = \frac{1.10^8 * 6,39.10^{-3}}{1,3.10^5 * 7,3} = 0,775 \tag{5.5.1}$$

$$\alpha_8 = \frac{EI_8}{k_c L_8} = \frac{1.10^8 * 5,02.10^{-3}}{1,3.10^5 * 7,3} = 0,610 \tag{5.5.2}$$

$$\alpha_9 = \frac{EI_9}{k_c L_9} = \frac{1.10^8 * 3,75.10^{-3}}{1,3.10^5 * 7,3} = 0,455 \tag{5.5.3}$$

Primeiramente, a estrutura foi resolvida para o caso em que todas as ligações fossem consideradas rígidas, $\alpha_{vigas} = 0$ e articuladas $\alpha_{vigas} \rightarrow \infty$.

Posteriormente foram substituídos todos os dados fornecidos do pórtico ao programa Visual Basic, para ligações semi-rígidas nos elementos de vigas.

TABELA 5.15 – Deslocamentos nodais horizontais para os três modelos de conexões:

nó	ligações rígidas ($k \rightarrow \infty$) $D_x \text{ (cm)}$	ligações semi-rígidas ($k = 1,13.10^5 \text{ kN.m/rad}$) $D_x \text{ (cm)}$	ligações articuladas ($k=0$) $D_x \text{ (cm)}$
nó 2 = nó 7	0,195	0,405	1,43
nó 3 = nó 6	0,472	1,125	5,01
nó 4 = nó 5	0,708	1,75	9,77

Os resultados fornecidos por Shi (1990) apresentaram deslocamentos nodais praticamente iguais aos obtidos no presente estudo, com diferença percentuais em relação a todos os nós menores que 1,2 % .

Os deslocamentos nodais estão plotados a seguir na estrutura para uma melhor visualização e comparação:

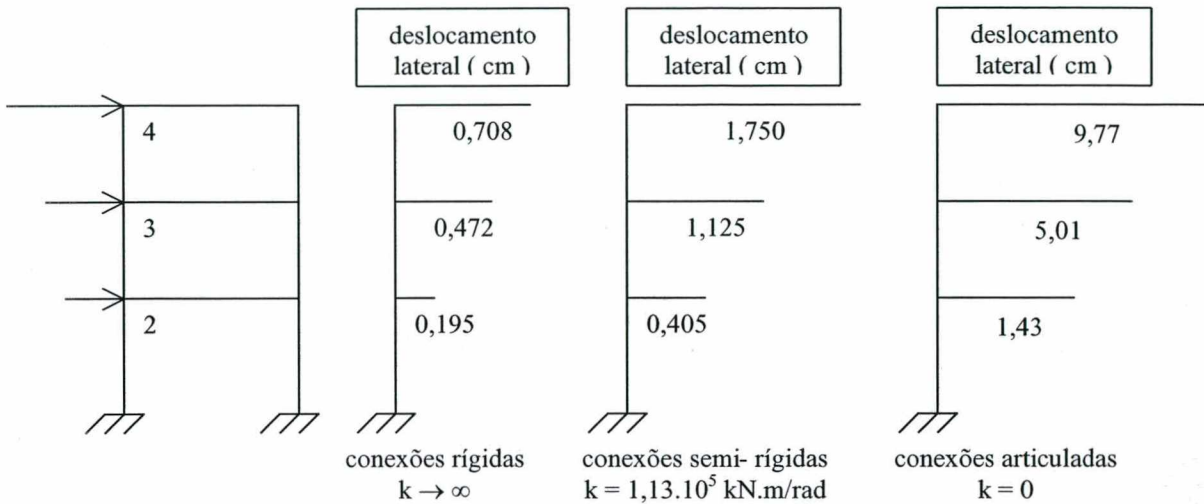


FIGURA 5.29 – Comparação dos deslocamentos nodais para os três modelos de conexão.

Pode-se concluir que, para ligações semi-rígidas, a estrutura se torna muito mais flexível e sensível a deslocamentos nodais, superiores aos deslocamentos para ligações rígidas, chegando a representar diferenças percentuais de 107, 138 e 147% para os nós 2 , 3 e 4 respectivamente, porém inferiores aos deslocamentos nodais articulados.

Sugere-se, no exemplo ilustrado, a preocupação do calculista em termos de verificar se material utilizado, aço, possui a propriedade de ductilidade necessária para tal deslocamento, sem sofrer uma ruptura frágil antes.

Devido a deslocamentos muito grandes da estrutura, existe a possibilidade de ocorrência de problemas de não-linearidade geométrica, por efeitos de 2ª ordem, porém, não vai ser objeto de estudo deste trabalho.

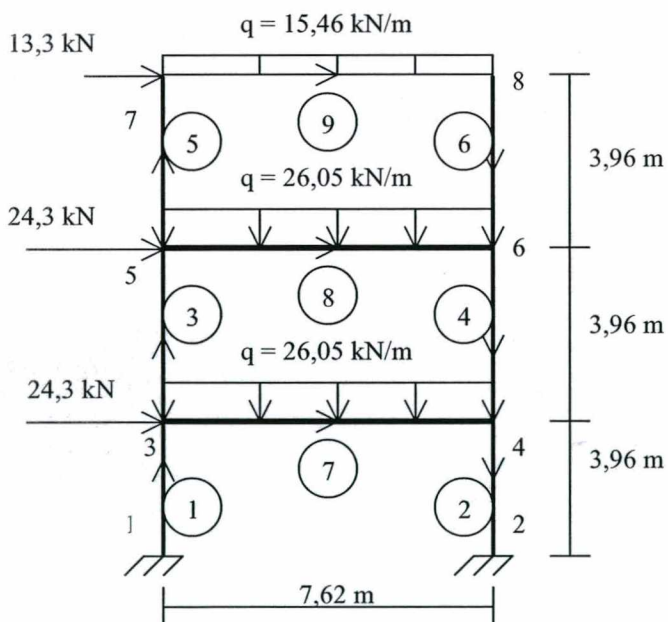
Exemplo 5.6:

Apresenta um estudo completo das ligações de um pórtico plano para ligações rígidas, semi-rígidas e semi-rígidas com momento de plastificação da conexão, utilizando um diagrama momento versus rotação elasto-plástico perfeito.

Pórtico plano de aço, composto por 9 barras, bi-engastado, solicitado por cargas gravitacionais distribuídas nas vigas e cargas nodais horizontais, conforme figura abaixo. Os resultados obtidos no programa Visual Basic são comparados e analisados de acordo com o artigo de DHILLON et al (1989).

Neste exemplo, serão realizados 4 tipos de análise estruturais:

- resolução utilizando ligações rígidas;
- resolução utilizando ligações articuladas;
- resolução por ligações semi-rígidas para todas as barras para coeficiente adimensional $\alpha=0,035$ constante , utilizando uma análise linear-elástica;
- igual à análise anterior porém com aplicação do coeficiente de flexibilidade elástica para as vigas somente;
- análise não-linear das ligações semi-rígidas para os elementos de viga através de um diagrama elasto-plástico perfeito.



- dados:
 $E = 2,05.10^8 \text{ kN/m}^2$
aço MR-250 – $f_y = 25 \text{ kN/cm}^2$
- perfis IP adotados no programa V.B.:
pilares 1 e 2 : IP- 330:
pilares 3,4,5 e 6 : IP-300
vigas 7 e 8 : IP-500
viga 9 : IP-360
- coeficiente de flexibilidade elástica α
constante para todas as barras: 0,035

FIGURA 5.30 – Pórtico plano de três andares com carregamentos distribuídos e concentrados.

São suposições de cálculo utilizadas na análise da estrutura:

- deformações por esforço normal desprezadas;
- coeficiente adimensional constante para todas as barras;
- utilização dos perfis IP para as características geométricas dos elementos no cálculo do programa V.B., pela falta de informação dos perfis utilizados na bibliografia.

TABELA 5.16 - 1ª análise do pórtico com ligações rígidas:

elementos	DHILLON -Momentos de 1ª ordem (kN.m)	Perfil IP – Momentos (kN.m) V.B.	diferença (%)
1,2	93,99	93,88	0,11
3,4	77,38	78,00	0,49
5,6	65,07	65,82	1,15
7	168,78	169,44	0,39
8	134,09	135,42	0,99
9	65,07	65,82	1,15

A adoção dos perfis IP para os elementos do pórtico plano no programa Visual Basic adaptaram bem aos resultados fornecidos pela bibliografia, afetando pouco os valores dos momentos, da ordem menor do que 2 %.

TABELA 5.17 - 2ª análise do pórtico plano com ligação semi-rígidas para α constante em todas as barras e somente para as vigas da estrutura:

elementos	DHILLON -Momentos semi-rígidos (kN.m)	Momento para $\alpha = 0,035$		diferença (%)	
		barras:	vigas:	barras:	vigas:
1,2	93,99	88,09	91,06	6,3	3,1
3,4	77,38	73,85	76,61	4,6	0,99
5,6	65,07	60,81	63,52	6,5	2,4
7	168,78	158,87	164,81	5,9	2,4
8	134,09	126,25	131,88	5,8	1,6
9	65,07	60,81	63,52	6,5	2,4

Verifica-se que, os coeficientes de flexibilidade à flexão, aplicados somente nas vigas do pórtico plano, fornecem resultados mais próximos dos obtidos no artigo indicado.

As diferenças encontradas nos momentos, máximo de 3,1%, podem ser devidas à utilização no programa Visual Basic de um coeficiente adimensional constante para todas as ligações, sendo que, na resolução proposta do artigo, estes valores eram possivelmente variados. Outro fator relevante na influência dos resultados finais se deve a uma formulação matemática diferente, proposta no artigo, para representar a flexibilidade da ligação.

3ª – A análise não-linear foi feita para um diagrama momento versus rotação elasto-plástico perfeito, caracterizando um patamar de plastificação bem definido para cada ligação viga-pilar.

O processo é feito iterativamente pelo método secante, sendo que os momentos de cada ligação não devem ultrapassar o seu momento de plastificação. Primeiramente, parte-se de um coeficiente de flexibilidade inicial alfa igual a 0,035 para todas as ligações. A estrutura é resolvida e caso encontre um valor do momento maior que o momento de plastificação da conexão, o método iterativo é acionado.

Com o intuito de estudar o comportamento do pórtico através de uma análise elasto-plástica, os momentos de plastificação das conexões foram escolhidos de tal forma que sejam inferiores aos obtidos na análise elástica. Assim, os valores percentuais escolhidos para representar o momento de plastificação da conexão são relativamente pequenos. (ver tabela 5.19). Contudo, ao se adotar o coeficiente de flexibilidade inicial $\alpha = 0,035$, para uma efetiva comparação com os dados do artigo, está-se representando uma ligação bem próxima de rígida e proporcionando, dessa forma, momentos de plastificação das conexões com representativa parcela do momento de plastificação da seção das barras e, portanto, não representando adequadamente o comportamento real de uma conexão.

O momento de plastificação das seções transversais é obtido da seguinte forma:

$$M_{PL} = Z_x \cdot f_y \quad (5.3)$$

onde:

Z_x – módulo plástico do perfil;

f_y – tensão de escoamento do aço estrutural.

TABELA 5.18 – Momento de Plastificação das seções transversais.

membros	seção: perfil IP	Z_x (cm ³)	f_y (kN/cm ²)	M_{PL} (kN.m)
1 e 2	IP – 330	804	25	201
3, 4, 5 e 6	IP – 300	628	25	157
7 e 8	IP – 500	2200	25	550
9	IP – 360	1020	25	255

Para a análise não-linear, adotaram-se momentos de plastificação, para cada ligação, menores do que os obtidos na análise elástica, para $\alpha = 0,035$, aplicados

Para a análise não-linear, adotaram-se momentos de plastificação, para cada ligação, menores do que os obtidos na análise elástica, para $\alpha = 0,035$, aplicados somente na viga, sem a preocupação da relação rigidez inicial e do momento de plastificação da conexão (conforme citado na introdução deste capítulo).

TABELA 5.19 - Critério adotado para os momentos de plastificação das conexões.

membros	Momentos semi-rígidos (kN.m)	Critério adotado para o Momento de plastificação das conexões	Momento de plastificação das conexões (kN.m)
1,2	91,06	40% $M_{PL\ SEÇÃO}$	80
3,4	76,61	40% $M_{PL\ SEÇÃO}$	62,8
5,6	63,52	40% $M_{PL\ SEÇÃO}$	62,8
7	164,81	20% $M_{PL\ SEÇÃO}$	110
8	131,88	20% $M_{PL\ SEÇÃO}$	110
9	63,52	20% $M_{PL\ SEÇÃO}$	51

TABELA 5.20 - Comparação dos deslocamentos horizontais utilizando os três tipos de ligações viga-pilar:

nós	ligação rígida (cm)	ligação semi-rígida (cm)	ligação semi-rígida com Mpl (cm)	ligação articulada (cm)
3,4	0,87	0,91	1,32	5,96
5,6	1,76	1,86	2,97	20
7,8	2,17	2,32	4,03	37

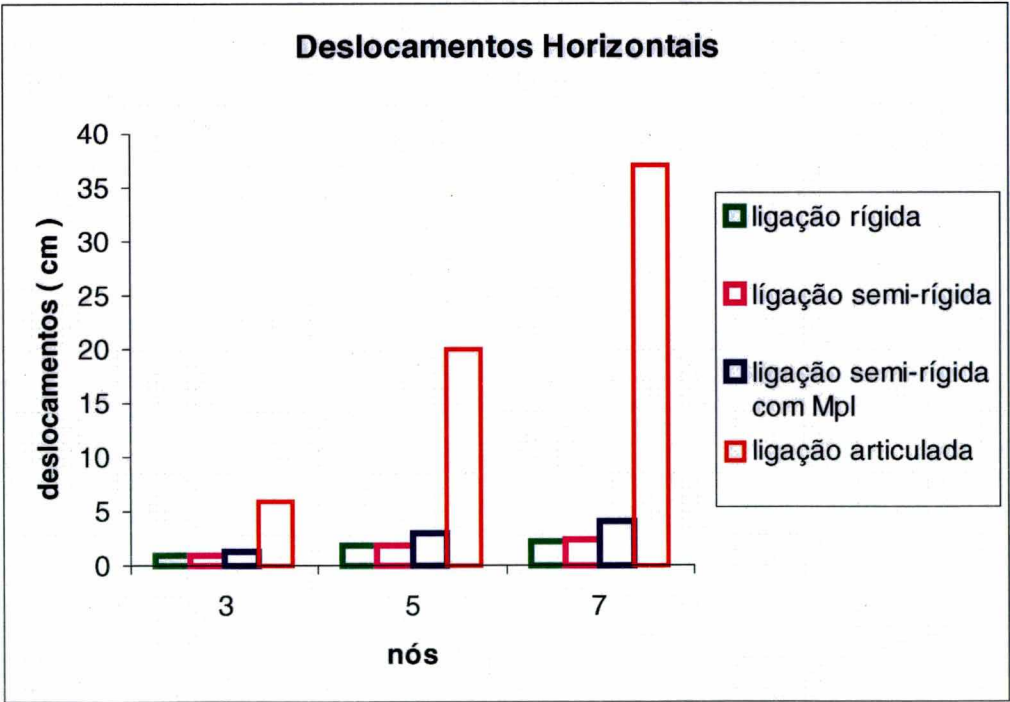


FIGURA 5.31 – Comparação dos modelos de conexões em relação aos deslocamentos nodais horizontais da estrutura.

Conclusões:

Para os deslocamentos horizontais, nota-se que as ligações semi-rígidas fornecem valores superiores, em relação às ligações rígidas, e se tornam ainda mais sensíveis à deformação quando incluímos um momento de plastificação da ligação como fator limitante na resolução do pórtico plano.

Quando a ligação de canto do pórtico atinge o seu momento de plastificação, ocorre uma redistribuição dos esforços solicitantes para as outras ligações ao longo da estrutura. Aqui, também, admite-se que a estrutura apresenta capacidade de se deformar sem haver rupturas frágeis antes.

6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O estudo apresentado evidencia a importância e a necessidade da aplicação do modelo de ligação semi-rígida nos projetos estruturais metálicos que, por permitir representar adequadamente o comportamento real da conexão viga - pilar, proporciona maior confiabilidade e segurança ao engenheiro projetista.

Conclusões extraídas no desenvolvimento do estudo das ligações semi -rígidas de estruturas metálicas.

- A matriz de rigidez, de elementos com “molas” nas extremidades, é uma matriz genérica que representa qualquer tipo de comportamento nodal da estrutura, rígida, semi-rígida e articulada.
- O coeficiente de flexibilidade elástica, α , é largamente utilizado devido à sua facilidade de programação. Porém, seu valor adimensional depende das propriedades geométricas do elemento: módulo de elasticidade E , inércia I e comprimento L , sendo inversamente proporcional ao coeficiente de rigidez à flexão k , ocasionando, desta forma, uma perda de sensibilidade na sua aplicação. O coeficiente teórico α não tem significado físico. Na prática, o que existe é a rigidez da flexão da conexão (k), que é obtida por ensaios experimentais.
- Para valores crescentes do coeficiente adimensional alfa, diminuem os momentos fletores na conexão, redistribuindo os esforços ao longo da estrutura. A partir de um gráfico, flecha- α , constata-se que, quanto maior o coeficiente de flexibilidade da conexão, maior é o deslocamento na estrutura.
- A formulação do elemento com “molas” nas extremidades foi analisada e comparada com a formulação considerando o elemento de conexão agindo, independentemente, e apresentou resultados bastante semelhantes.
- A colocação de “molas” somente nas vigas representam, adequada e fisicamente, o comportamento da conexão, considerando os pilares contínuos.

- Resultados experimentais são de primordial importância e necessidade, conforme observado ao longo do trabalho, para compreender o comportamento real da conexão viga-pilar e auxiliar no estudo numérico, oferecendo subsídios de projeto.
- A utilização do modelo de ligações semi-rígidas pode provocar na estrutura um aumento considerável dos deslocamentos nodais, conforme observado nos exemplos de aplicação. Porém, quando esses deslocamentos geram efeitos de segunda-ordem, que alteram significativamente os esforços solicitantes (10% ou mais), os efeitos dessa não-linearidade geométrica deveriam ser levados em consideração. Esses efeitos, nos casos usuais de projeto, poderiam ser incluídos através de métodos simplificados como o P- Δ ou da matriz de rigidez geométrica. Entretanto, este trabalho não inclui esses efeitos no estudo de modo a isolar o efeito da flexibilidade das ligações.
- Os estudos mostraram que conexões rígidas levam a um deslocamento de pórtico subestimado e a uma resistência superestimada, enquanto a consideração de conexões rotuladas tende a provocar um superdimensionamento das vigas.
- Os resultados, considerando conexões semi-rígidas em pórticos, alteram significativamente o seu comportamento estrutural, ocasionando redução dos momentos das vigas em relação às conexões articuladas, possibilidade de economia no projeto, tornando o seu dimensionamento mais eficaz. Em relação ao modelo de ligações rígidas, as ligações semi-rígidas apresentam momentos menores na conexão viga-pilar. Este fato proporciona economia no custos dos elementos e meios de ligação e redistribui os esforços ao longo da estrutura.

Recomendações de novas pesquisas para as conexões viga-pilar semi-rígidas:

- Análises da flexibilidade da conexão pelo Método dos Elementos Finitos (M.E.F.), modelando a conexão através de um elemento tipo “shell” (placa);
- Considerar, também, os efeitos de não-linearidade geométrica através de processos como P- Δ e matriz geométrica K_G ;
- Utilizar o comportamento da conexão por um gráfico momento-rotação não-linear em todo o seu “percurso”;

- Um estudo específico do comportamento de colunas com conexões semi-rígidas, levando em consideração os fenômenos de instabilidade;
- Considerar a rigidez da conexão ao esforço normal, ao esforço cortante, e seus efeitos combinados com a rigidez a flexão e a torção;
- Análise numérica, considerando o comportamento da conexão em três dimensões.

Em última análise, fica evidente que as vantagens estruturais advindas da utilização da flexibilidade das conexões justificam a necessidade de mais pesquisas e desenvolvimentos futuros que permitam, na forma de recomendações, normas e padrões, aplicações em projetos abrangentes, assegurando um maior grau de estabilidade e segurança para o uso de ligações semi-rígidas.

7 – BIBLIOGRAFIA

- ACKROYD, H.M.; GERSTLE K.H., *Behavior of Type 2 Steel Frames*, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 108, nº 7, July, 1982.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios*, NBR 8800. Rio de Janeiro, 1986.
- BELLEI, I. H. – *Edifícios Industriais em Aço - Projeto e cálculo – FEM – Segunda edição revisada*. março/98.
- BJORHOVDE, R., COLSON, A. & BROZETTI, J., *Classification System for Beam-To-Column Connections*, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 116(11), pp 3059-3076, 1990.
- BLANDFORD, G.E., *Static Analysis of Flexibly Connected Thin-Walled Plane Frames*, *Computers & Structures*, Vol.28, nº 1, pp. 105-113, 1998.
- CAMERON, T.M.; JORDAN, L.; EL-SAYED, M.E.M., *Sensitivity of Structural Joint Stiffnesses with Respect to Beam Properties: A Hybrid Approach*, *Computers & Structures*, Vol.63, nº 6, pp.1037-1041, 1997.
- CARQUEJA, M. (UFSC – ECV, Florianópolis). *Apostila e notas de aula – Estruturas Metálicas*, Curso de Graduação em Engenharia Civil. UFSC. 1998.
- CHEN WAI-FAH; KISHI N. *Semirig Steel Beam-to-Column Connections: Data Base and Modeling*. *J. of Structural Engineering*, Vol. 115, nº 1, 1989.
- DHILLON B. S.; S. ABDEL-MAJID, *Interactive Analysis and Design of Flexibly Connected Frames*, *Computers & Structures*, Vol.36, nº2, pp.189-202, 1990.
- EL-SAYED, M.E.M., *Calculation of Joint Spring Rates Using Finite Element Formulation*, *Computers & Structures*, Vol.33, nº 4, pp. 977-981, 1989.

ESTRIN, G. YA., *Determination of Bending Moments in Semi-Rigid Steel Framing Joints*, Computers & Structures, Vol. 45, nº 5/6, pp. 1109-1117, 1992.

GERE, J.M.; WEAVER Jr., W. *Análise de estruturas reticuladas*. Trad. De Carlos M.P. Ferreira Pinto. Rio de Janeiro, Guanabara, 1987.

GOTO, Y.; MIYASHITA S. *Classification System for Rigid and Semirigid Connections*, Journal of Structural Engineering, Vol. 124, nº7, 1998.

HALLER P., *Progress in Timber Joint Development and Modelling*, pp. 337-344, 1998.

HERINGER, A. A., *Análise de Pórticos Planos com Conexões Semi-Rígidas Através da Programação Matemática*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, UnB, Brasília, DF, 1996.

KHAROUF N.; MCCLURE G. & SMITH I., *Stress Analysis of one-and two-bolt Timber Connections*, pp. 329-336, 1998.

KIRBY, P. A., *Semi-Rigid Action in Steel Framed Structures*, University of Sheffield UK, CTCM- 02/96.

KISHI N. ; CHEN W. F. & GOTO Y. *Effective Length Factor of Columns in Semirigid and Unbraced Frames*, vol. 123, nº 3, 1997.

KISHI N. ; CHEN W. F.; GOTO T. & MATSUOKA K. G., *Design Aid of Semi-rigid Connections for Frame Analysis*, Engineering Journal/ AISC, pp. 90-107, 1993.

KISHI, N.; CHEN, WAI-FAH, *Moment-Rotation Relations of Semirigid Connections with Angles*, Journal of Structural Engineering, Vol.116, nº7, 1990.

KISHI, N.; CHEN, W. F.; GOTO, Y.; HASAN, R., *Behavior of Tall Buildings with Mixed Use of Rigid and Semi-Rigid Connections*, Computers & Structures, Vol.61, nº 6, pp.1193-1206, 1996.

LA ROVERE, H.L. (UFSC - ECV, Florianópolis). Notas de Aula. ECV3203 – *Análise matricial de estruturas*, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFSC, Florianópolis, 1998.

LI T.Q., CHOO B.S. & NETHERCOT D. A.. *Connection Element for the Analysis of Semi-Rigid Frames*. J. Construct. Steel Research, 32 , Nottingham, 1995.

LIGHFOOT E. & LE MESSURIER A. P. *Elastic Analysis of Frameworks with Elastic Connections*, J.of the Structural Division, vol. 100, ST6, 1974.

LORIGGIO, D. D. (UFSC - ECV, Florianópolis). Notas de Aula – *Estruturas em Regime Elasto-Plástico*, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFSC, 1998.

LORIGGIO, D. D. (UFSC - ECV, Florianópolis). Notas de Aula. – *Estabilidade II*, Curso de Graduação em Engenharia Civil, UFSC, 1999.

MAGGI, Y. I., Análise Numérica, via M.E.F., do Comportamento de Ligações Parafusadas Viga-Coluna com Chapa de Topo, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 2000.

MATA, L. A. C. da, Análise Não-Linear pelo Método dos Elementos Finitos de Ligações por Chapa Simples, levando em conta o Comportamento Semi-Rígido, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, UFMG, 1998.

MATHCAD. Version Plus 6.0. *Professional Edition*. MathSoft, Inc. USA, 1995.

MICROSOFT VISUAL BASIC 5 – *step by step* , Version 4.0. Linguagem de Programação, USA, 1997.

MIX. Version 7.89 - Sistema de Análise Estrutural, Pinheiro Medeiros Informática S/C Ltda, 1995.

MONCARZ P.D.; GERSTLE K. H., *Steel Frames with Nonlinear Connections*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.107, n°8, August, 1981.

SALMON C. G. & JOHNSON J. E., *Steel Structures – Design and Behavior* – second edition, 1980, Cap. 13, Connections, págs. 729 – 733.

SAP2000. Version Plus 6.06. *Integrated finit element analysis and design of structures*. Computers and Structures, Inc. Berkeley, California, USA, 1996.

SHI, G. *Dissertation Information Service University Microfilms International, U.M.I.*, Georgia Institute of Technology, 1990.

SIMÕES, L.M.C., *Optimization of Frames with Semi-Rigid Connection*, Computers & Structures, Vol. 60, n° 4, pp.531-539, 1996.

TAN S. H. ; SEAH L. K. & FOK S. C., *Connections in Cold-Formed Thin-Walled Structures*, Computers & Structures, Vol. 60, n° 1, pp. 169-172, 1996.

TOADER I.H.I., *Stability Functions for Members with Semirigid Joint Connections*, Journal of Structural Engineering, Vol. 119, n° 2, 1993.

VALLE, A. ; LA ROVERE H.L.; FUSCO, P.B. *Influência da rigidez das ligações no comportamento de estruturas de madeira laminada colada*, UFSC, 1998.

VISUAL BASIC 5.0, - *Iniciando*, Version 5, Linguagem de Programação, Varela J.R., Brasil 1997.

XU, L.; GRIERSON D. E., *Computer-Automated Design of Semirigid Steel Frameworks*, Journal of Structural Engineering, Vol.119, n°6, 1993.

YARDIMCI N. C. ; YORGUN C. & ARDA T. S. , *Tests on beam-column strong and weak axis connections*, Computers & Structures, Vol. 61, n°3, pp. 393-399, 1996.

ANEXO A

PROGRAMA DE RESOLUÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS PELO MÉTODO DA RIGIDEZ NA LINGUAGEM VISUAL BASIC 5.0

1. A análise utilizada para a resolução deste programa.

Como na maioria dos programas comerciais existentes no mercado, atualmente, esta programação é elaborada com base na Análise Matricial das Estruturas pelo *Método dos Deslocamentos*.

A utilização deste método é largamente difundida entre programadores e usuários, em geral, por apresentar as seguintes características especiais:

- execução simples e prático;
- facilidade de programação (escolha de uma única isostática fundamental) ;
- confiabilidade dos resultados;

2. Atualização do programa de pórtico plano da linguagem Quick Basic para a linguagem Visual Basic 5.0.

O programa original continha a sua estrutura de programação na linguagem Quick Basic, sendo que esta linguagem é muito pobre em entrada de dados, em recursos visuais e, principalmente, aloca pouca capacidade de memória para a utilização de seus programas. A sua tela de apresentação é de difícil utilização e seus recursos são antigos e limitados.

O Visual Basic contém uma estrutura de programação muito rica em entradas de dados, possui recursos visuais atualizados e faz a execução de seus programas com perfeição. A sua tela de apresentação é iterativa, de fácil utilização e compreensão por ser semelhante a dos outros programas com ambiente Windows (Word, Excel, etc.). Quanto à memória, o Visual Basic utiliza toda a capacidade disponível no winchester, possibilitando a execução de estruturas mais complexas, mantendo precisão nos resultados e executando-as, com tempo de processamento otimizado.

3. Processo de tradução do programa.

O estudo se iniciou com o entendimento do código do programa na linguagem Quick Basic, compreendendo o método utilizado para sua execução (*Método dos Deslocamentos*), até a maneira pela qual o programa foi idealizado e estruturado.

Em seguida, foi feita uma análise de comparação para verificar o que a nova linguagem (Visual Basic) poderia agregar em termos de otimização e melhoria do processo.

A estruturação do programa para nova linguagem de programação foi dividida em três formulários e dois módulos. Formulário é uma janela que se pode personalizar para criar a interface de usuário do seu programa. O módulo é um recipiente em separado (arquivo especial) de um programa que contém variáveis e “procedures” que podem ser usadas em qualquer lugar do programa.

Foi utilizado um formulário para a codificação completa do programa, contendo escolha de um arquivo texto, entrada de dados, chamada das sub-rotinas e impressão dos resultados.

Foram criados mais dois formulários para a impressão de resultados na tela, sendo que um deles locava os dados de entrada e o outro, os resultados de saída do programa.

As variáveis foram criadas para serem consideradas, na sua grande maioria, como globais, ou seja, reconhecíveis em todo o programa, e foram armazenadas em um módulo. No outro módulo, foram armazenadas as sub-rotinas do programa principal.

4. Principais dificuldades encontradas no programa.

- Definição das Variáveis locais e globais;
- Códigos de comandos de execução de tarefas.

5. Inserção de rotinas semi-rígidas na linguagem de programação em Visual Basic.

- Coeficientes de flexibilidade nas extremidades das barras;
- Coeficientes da Matriz Local Semi-Rígida;
- Matriz de transformação;
- Vetor de engastamento perfeito no sistema local;
- Magnitudes dos momentos de plastificação nas extremidades das barras;
- Método iterativo secante.

6. Execução do programa para uma análise elasto-plástica de pórticos planos.

Criação de um arquivo texto apresentando os dados da estrutura da seguinte forma:

- I. número de nós;
- II. coordenadas de cada nó;
- III. número de barras;
- IV. propriedades e características de cada barra: módulo de elasticidade, momento de inércia e área da seção transversal;
- V. incidência das barras;
- VI. carregamento nas barras: distribuído e concentrado;
- VII. número de nós com esforço;
- VIII. esforço normal, esforço vertical e momento fletor;
- IX. número de nós com restrição de apoio;
- X. nó restringido, $codx$, $cody$, $codz^*$, $valx$, $valy$, $valz^{**}$.
- XI. coeficiente de flexibilidade, α , para a extremidade de cada barra;
- XII. momento de plastificação da conexão para a extremidade de cada barra;

* Representa o código de restrição do nó para as direções x, y e z. Para direção restringida, utiliza-se o dígito 1, caso contrário, dígito 0.

** Representa a existência (valor diferente de zero) ou não (dígito zero) de deslocamentos prescritos nos apoios.

7. Resultados fornecidos pela execução do programa:

- comprimentos e ângulos das barras;
- esforços solicitantes internos: esforço normal, esforço cortante e momento fletor para cada barra;
- deslocamentos nos três graus de liberdade de cada nó : horizontal, vertical e ângulo de rotação para cada nó;
- coeficiente de flexibilidade real da conexão;
- deslocamento rotacional da “mola”, do pilar e da viga.

ANEXO B

APRESENTAÇÃO DA LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO VISUAL BASIC

Organização do programa dividido em três formulários e dois módulos:

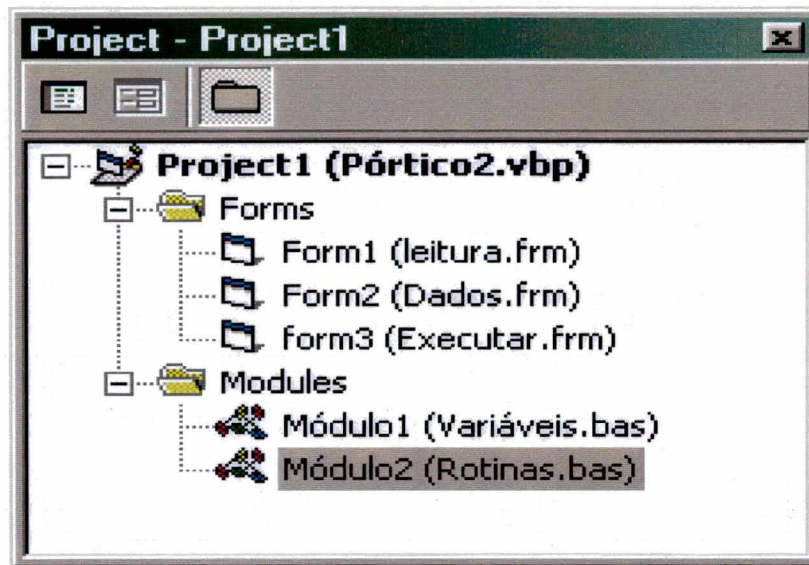


FIGURA – Impressão da tela mostrando a organização do programa.

Variáveis globais públicas armazenadas no módulo 1.

Option Base 1

```
Public nos(), Propr(), Incid(), Carreg(), F(), Restr(), MatLocSR() As Variant
Public MatTransp(), MatTransf(), MatGlobSR(), MatEstrSR(), FoGlob() As Variant
Public Indep(), Esforço(), Flex(), Mpl(), Aux(), v(), F0(), Impressão() As Variant
Public NBarras, NNos, ngl, nr, Nit As Integer
Public l(), Ang(), s(), FoLocSR(), AMMáx As Variant
Public ArquivoSelecioneado As Variant
```

Sub-rotinas armazenadas no módulo 2 do programa Visual Basic.

```
Sub Comprimento()
ReDim l(NBarras), Ang(NBarras)
For b = 1 To NBarras
    xi = nos(Incid(b, 1), 1)
    yi = nos(Incid(b, 1), 2)
    xf = nos(Incid(b, 2), 1)
    yf = nos(Incid(b, 2), 2)
'CALCULO DO COMPRIMENTO DAS BARRAS
    l(b) = Sqr((xf - xi) ^ 2 + (yf - yi) ^ 2)

'CALCULO DO ÂNGULO DA BARRA
    If xf > xi And yf = yi Then Ang(b) = 0
    If xf < xi And yf = yi Then Ang(b) = 3.141592654
    If xf = xi And yf > yi Then Ang(b) = 1.570796327
    If xf = xi And yf < yi Then Ang(b) = 4.71238898
```

```

If xf > xi And yf > yi Then Ang(b) = Atn((yf- yi) / (xf - xi)) '1 Q
If xf < xi And yf > yi Then Ang(b) = 3.141592654- Atn((yf- yi) / (xf - xi)) '2 Q
If xf < xi And yf < yi Then Ang(b) = 3.141592654 + Atn((yf- yi) / (xf - xi)) '3 Q
If xf > xi And yf < yi Then Ang(b) = 6.283185307- Atn((yf- yi) / (xf - xi)) '4 Q
Next b
End Sub

```

```

Sub Flexibilidade()
ReDim s(NBarras)
For b = 1 To NBarras
    e = Propr(b, 1)
    i = Propr(b, 2)
    a = Propr(b, 3)
    s(b) = (e * i) / l(b) * (1) / (4 * (1 + 3 * Flex(b, 1)) * (1 + 3 * Flex(b, 2)) - 1)
Next b
End Sub

```

'CÁLCULO DA MATRIZ LOCAL Semi-Rígida PARA CADA BARRA:

```

Sub LeMatLocSR()
ReDim MatLocSR(NBarras, 6, 6)
For b = 1 To NBarras
    e = Propr(b, 1)
    i = Propr(b, 2)
    a = Propr(b, 3)
    MatLocSR(b, 1, 1) = e * a / l(b)
    MatLocSR(b, 1, 4) = -MatLocSR(b, 1, 1)
    MatLocSR(b, 2, 2) = 12 * s(b) * (1 + (1 + 3 * Flex(b, 1)) + (1 + 3 * Flex(b, 2))) / l(b) ^ 2
    MatLocSR(b, 2, 3) = s(b) * (12 * (1 + 3 * Flex(b, 2)) + 6) / l(b)
    MatLocSR(b, 2, 5) = -MatLocSR(b, 2, 2)
    MatLocSR(b, 2, 6) = s(b) * (6 + 12 * (1 + 3 * Flex(b, 1))) / l(b)
    MatLocSR(b, 3, 3) = s(b) * (12 * (1 + 3 * Flex(b, 2)))
    MatLocSR(b, 3, 5) = -MatLocSR(b, 2, 3)
    MatLocSR(b, 3, 6) = s(b) * 6
    MatLocSR(b, 4, 4) = MatLocSR(b, 1, 1)
    MatLocSR(b, 5, 5) = MatLocSR(b, 2, 2)
    MatLocSR(b, 5, 6) = -MatLocSR(b, 2, 6)
    MatLocSR(b, 6, 6) = s(b) * (12 * (1 + 3 * Flex(b, 1)))
For c = 2 To 6
    For d = 1 To 6
        If c > d Then
            MatLocSR(b, c, d) = MatLocSR(b, d, c)
        End If
    Next d
Next c
Next b
End Sub

```

'CÁLCULO DA MATRIZ GLOBAL DE CADA BARRA

```

Sub LeMatGlobSR()
ReDim MatTransf(NBarras, 6, 6)
ReDim MatTransp(NBarras, 6, 6)
ReDim MatGlobSR(NBarras, 6, 6)
ReDim MatAux(NBarras, 6, 6)
For bar = 1 To NBarras
    'CALCULO DA MATRIZ DE TRANSFORMACAO
    MatTransf(bar, 1, 1) = Cos(Ang(bar))
    MatTransf(bar, 1, 2) = Sin(Ang(bar))

```

```

MatTransf(bar, 2, 1) = -MatTransf(bar, 1, 2)
MatTransf(bar, 2, 2) = MatTransf(bar, 1, 1)
MatTransf(bar, 3, 3) = 1
MatTransf(bar, 4, 4) = MatTransf(bar, 1, 1)
MatTransf(bar, 4, 5) = MatTransf(bar, 1, 2)
MatTransf(bar, 5, 4) = -MatTransf(bar, 1, 2)
MatTransf(bar, 5, 5) = MatTransf(bar, 1, 1)
MatTransf(bar, 6, 6) = 1
'CALCULO DA TRANSPOSTA DA MATRIZ DE TRANSFORMACAO
For b = 1 To 6
  For c = 1 To 6
    MatTransp(bar, b, c) = MatTransf(bar, c, b)
  Next c
Next b
Next bar
'CALCULO DA TRANSFORMACAO DO SISTEMA LOCAL PARA O GLOBAL
For bar = 1 To NBarras
  For c = 1 To 6
    For d = 1 To 6
      For m = 1 To 6
        MatAux(bar, c, d) = MatAux(bar, c, d) + MatTransp(bar, c, m) * MatLocSR(bar, m, d)
      Next m
    Next d
  Next c
Next bar
For bar = 1 To NBarras
  For c = 1 To 6
    For d = 1 To 6
      For m = 1 To 6
        MatGlobSR(bar, c, d) = MatGlobSR(bar, c, d) + MatAux(bar, c, m) * MatTransf(bar, m, d)
      Next m
    Next d
  Next c
Next bar

End Sub

'CÁLCULO DA MATRIZ DA ESTRUTURA:
Sub LeMatEstrSR()
ReDim MatEstrSR(ngl + 20, ngl + 40)
For b = 1 To NBarras
  k = Incid(b, 1)
  j = Incid(b, 2)
  a = 3 * k - 2
  c = 3 * k - 1
  d = 3 * k
  e = 3 * j - 2
  n = 3 * j - 1
  g = 3 * j
  MatEstrSR(a, a) = MatGlobSR(b, 1, 1) + MatEstrSR(a, a)
  MatEstrSR(a, c) = MatGlobSR(b, 1, 2) + MatEstrSR(a, c)
  MatEstrSR(a, d) = MatGlobSR(b, 1, 3) + MatEstrSR(a, d)
  MatEstrSR(a, e) = MatGlobSR(b, 1, 4) + MatEstrSR(a, e)
  MatEstrSR(a, n) = MatGlobSR(b, 1, 5) + MatEstrSR(a, n)
  MatEstrSR(a, g) = MatGlobSR(b, 1, 6) + MatEstrSR(a, g)
  MatEstrSR(c, a) = MatGlobSR(b, 2, 1) + MatEstrSR(c, a)
  MatEstrSR(c, c) = MatGlobSR(b, 2, 2) + MatEstrSR(c, c)
  MatEstrSR(c, d) = MatGlobSR(b, 2, 3) + MatEstrSR(c, d)
  MatEstrSR(c, e) = MatGlobSR(b, 2, 4) + MatEstrSR(c, e)

```



```

MatEstrSR(c, n) = MatGlobSR(b, 2, 5) + MatEstrSR(c, n)
MatEstrSR(c, g) = MatGlobSR(b, 2, 6) + MatEstrSR(c, g)
MatEstrSR(d, a) = MatGlobSR(b, 3, 1) + MatEstrSR(d, a)
MatEstrSR(d, c) = MatGlobSR(b, 3, 2) + MatEstrSR(d, c)
MatEstrSR(d, d) = MatGlobSR(b, 3, 3) + MatEstrSR(d, d)
MatEstrSR(d, e) = MatGlobSR(b, 3, 4) + MatEstrSR(d, e)
MatEstrSR(d, n) = MatGlobSR(b, 3, 5) + MatEstrSR(d, n)
MatEstrSR(d, g) = MatGlobSR(b, 3, 6) + MatEstrSR(d, g)
MatEstrSR(e, a) = MatGlobSR(b, 4, 1) + MatEstrSR(e, a)
MatEstrSR(e, c) = MatGlobSR(b, 4, 2) + MatEstrSR(e, c)
MatEstrSR(e, d) = MatGlobSR(b, 4, 3) + MatEstrSR(e, d)
MatEstrSR(e, e) = MatGlobSR(b, 4, 4) + MatEstrSR(e, e)
MatEstrSR(e, n) = MatGlobSR(b, 4, 5) + MatEstrSR(e, n)
MatEstrSR(e, g) = MatGlobSR(b, 4, 6) + MatEstrSR(e, g)
MatEstrSR(n, a) = MatGlobSR(b, 5, 1) + MatEstrSR(n, a)
MatEstrSR(n, c) = MatGlobSR(b, 5, 2) + MatEstrSR(n, c)
MatEstrSR(n, d) = MatGlobSR(b, 5, 3) + MatEstrSR(n, d)
MatEstrSR(n, e) = MatGlobSR(b, 5, 4) + MatEstrSR(n, e)
MatEstrSR(n, n) = MatGlobSR(b, 5, 5) + MatEstrSR(n, n)
MatEstrSR(n, g) = MatGlobSR(b, 5, 6) + MatEstrSR(n, g)
MatEstrSR(g, a) = MatGlobSR(b, 6, 1) + MatEstrSR(g, a)
MatEstrSR(g, c) = MatGlobSR(b, 6, 2) + MatEstrSR(g, c)
MatEstrSR(g, d) = MatGlobSR(b, 6, 3) + MatEstrSR(g, d)
MatEstrSR(g, e) = MatGlobSR(b, 6, 4) + MatEstrSR(g, e)
MatEstrSR(g, n) = MatGlobSR(b, 6, 5) + MatEstrSR(g, n)
MatEstrSR(g, g) = MatGlobSR(b, 6, 6) + MatEstrSR(g, g)

```

Next b

End Sub

'CÁLCULO DO TERMO INDEPENDENTE para ligações semi-rígidas:

Sub TermoIndepSR()

ReDim FoGlob(NBarras, 6)

ReDim Indep(ngl)

ReDim F0(ngl)

ReDim FoLocSR(NBarras, 6)

For bar = 1 To NBarras

e = Propr(bar, 1)

i = Propr(bar, 2)

a = Propr(bar, 3)

j = Incid(bar, 1)

k = Incid(bar, 2)

c = 3 * j - 2

d = 3 * j - 1

t = 3 * j

g = 3 * k - 2

h = 3 * k - 1

m = 3 * k

q = Carreg(bar, 1)

p = Carreg(bar, 2)

p2 = q * l(bar)

pt = p + p2

FoLocSR(bar, 1) = 0

FoLocSR(bar, 3) = (s(bar) * l(bar)) / (e * i) * (p * l(bar) / 8 + q * l(bar) ^ 2 / 12) * (4 * (1 + 3 * Flex(bar, 2)) - 1) + (2 * s(bar) * l(bar)) / (e * i) * (-p * l(bar) / 8 - q * l(bar) ^ 2 / 12) * (1 - (1 + 3 * Flex(bar, 2)))

FoLocSR(bar, 4) = 0

$$\text{FoLocSR}(\text{bar}, 6) = (\text{s}(\text{bar}) * \text{l}(\text{bar})) / (\text{e} * \text{i}) * (-\text{p} * \text{l}(\text{bar}) / 8 - \text{q} * \text{l}(\text{bar})^2 / 12) * (4 * (1 + 3 * \text{Flex}(\text{bar}, 1)) - 1) + (2 * \text{s}(\text{bar}) * \text{l}(\text{bar})) / (\text{e} * \text{i}) * (\text{p} * \text{l}(\text{bar}) / 8 + \text{q} * \text{l}(\text{bar})^2 / 12) * (1 - (1 + 3 * \text{Flex}(\text{bar}, 1)))$$

$$\text{FoLocSR}(\text{bar}, 2) = (1) / \text{l}(\text{bar}) * (\text{FoLocSR}(\text{bar}, 3) + \text{FoLocSR}(\text{bar}, 6) + \text{q} * \text{l}(\text{bar})^2 / 2 + \text{p} * \text{l}(\text{bar}) / 2)$$

$$\text{FoLocSR}(\text{bar}, 5) = -\text{FoLocSR}(\text{bar}, 2) + \text{q} * \text{l}(\text{bar}) + \text{p}$$

If Ang(bar) < 0 Then

For lin = 1 To 6

For col = 1 To 6

FoGlob(bar, lin) = FoGlob(bar, lin) + MatTransp(bar, lin, col) * FoLocSR(bar, col)

Next col

Next lin

End If

If Ang(bar) = 0 Then

For b = 1 To 6

FoGlob(bar, b) = FoLocSR(bar, b)

Next b

End If

F0(c) = F0(c) + FoGlob(bar, 1)

F0(d) = F0(d) + FoGlob(bar, 2)

F0(t) = F0(t) + FoGlob(bar, 3)

F0(g) = F0(g) + FoGlob(bar, 4)

F0(h) = F0(h) + FoGlob(bar, 5)

F0(m) = F0(m) + FoGlob(bar, 6)

Next bar

For i = 1 To ngl

Indep(i) = F(i) - F0(i)

Next i

End Sub

'CÁLCULO DA RESTRIÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE:

'CÁLCULO PARA TESTE DOS G.L.:

Sub RestrGL()

For cr = 1 To nr

If Restr(cr, 2) = 1 Then

gl = 3 * Restr(cr, 1) - 2

valor = Restr(cr, 5)

For linha = 1 To ngl

Indep(linha) = Indep(linha) - MatEstrSR(linha, gl) * valor

MatEstrSR(linha, gl) = 0

Next linha

For col = 1 To ngl

MatEstrSR(gl, col) = 0

Next col

MatEstrSR(gl, gl) = 1

Indep(gl) = valor

End If

If Restr(cr, 3) = 1 Then

gl = 3 * Restr(cr, 1) - 1

valor = Restr(cr, 6)

For linha = 1 To ngl

Indep(linha) = Indep(linha) - MatEstrSR(linha, gl) * valor

MatEstrSR(linha, gl) = 0

Next linha

For col = 1 To ngl

MatEstrSR(gl, col) = 0

Next col

MatEstrSR(gl, gl) = 1

Indep(gl) = valor

```

End If
If Restr(cr, 4) = 1 Then
  gl = 3 * Restr(cr, 1)
  valor = Restr(cr, 7)
  For linha = 1 To ngl
    Indep(linha) = Indep(linha) - MatEstrSR(linha, gl) * valor
    MatEstrSR(linha, gl) = 0
  Next linha
For col = 1 To ngl
  MatEstrSR(gl, col) = 0
Next col
MatEstrSR(gl, gl) = 1
Indep(gl) = valor
End If
Next cr
End Sub

```

'CÁLCULO DA RESOLUÇÃO DO SISTEMA:

'EQUACOES LINEARES

'CALCULO DA LARGURA DE BANDA

Sub CalcResSist()

ReDim Aux(ngl, ngl), v(ngl) As Variant

'EQUAÇÕES LINEARES

'CÁLCULO DA LARGURA DE BANDA

n = ngl

For m = 1 To NBarras

dif = Abs(Incid(m, 1) - Incid(m, 2)) * 3 + 3

If ms < dif Then ms = dif

Next m

'ARMAZENA MATRIZ DE BANDA SIMETRICA SUPERIOR

e = 0

For m = 1 To n

For h = 1 To ms

Aux(m, h) = MatEstrSR(m, h + e)

Next h

e = e + 1

Next m

'RESOLUCAO DE SISTEMA DA MATRIZ DE BANDA SIMETRICA

n1 = n - 1

For k = 1 To n1

c = Aux(k, 1)

k1 = k + 1

If (Abs(c) - 0.000001) <= 0 Then

Print #2, "singularidade na linha ", k

End

End If

'DIVIDE A LINHA POR COEFICIENTE DA DIAGONAL

ni = (k1 + ms) - 2

If ni <= n Then

u = ni

Else

u = n

End If

For j = 2 To ms

v(j) = Aux(k, j)

Next j

For j = k1 To u


```

k2 = (j - k) + 1
Aux(k, k2) = Aux(k, k2) / c
Next j
Indep(k) = Indep(k) / c
For i = k1 To u
  k2 = (i - k1) + 2
  c = v(k2)
  For j = i To u
    k2 = (j - i) + 1
    k3 = (j - k) + 1
    Aux(i, k2) = Aux(i, k2) - c * Aux(k, k3)
  Next j
  Indep(i) = Indep(i) - c * Indep(k)
Next i
Next k
If (Abs(Aux(n, 1)) - 0.000001) >= 0 Then
  Indep(n) = Indep(n) / Aux(n, 1)
End If
For i = 1 To n1
  k = n - i
  k1 = k + 1
  ni = (k1 + ms) - 2
  If ni <= n Then
    u = ni
  Else
    u = n
  End If
  For j = k1 To u
    k2 = (j - k) + 1
    Indep(k) = Indep(k) - Aux(k, k2) * Indep(j)
  Next j
Next i
End Sub
'ms = metade da largura de banda + diagonal principal
'n = numero de elementos da coluna da matriz a
'Indep = matriz dos termos independentes; vai conter os valores das
' incognitas procuradas pela resolucao
'Aux = matriz que contem os coeficientes de rigidez

```

'CÁLCULO DOS ESFORÇOS:

```

Sub CalcEsf()
Dim Auxi(6), ind(6)
ReDim Esforço(NBarras, 6)
If Nit = 0 Then
  form3.List1.AddItem (" Valores iniciais dos coeficientes de flexibilidade e dos momentos : ") & (" ")
Else
  form3.List1.AddItem (" ")
  If Nit / 10 - Nit \ 10 = 0 Then
    form3.List1.AddItem (" Valores dos coeficientes de flexibilidade e dos momentos depois de : ") & (" ")
  ) & (Nit) & (" ") & (" iterações : ")
  End If
End If
For b = 1 To NBarras
  j = Incid(b, 1)
  k = Incid(b, 2)
  ind(1) = 3 * j - 2
  ind(2) = 3 * j - 1
  ind(3) = 3 * j
  ind(4) = 3 * k - 2

```

```

ind(5) = 3 * k - 1
ind(6) = 3 * k
For lin = 1 To 6
  Auxil(lin) = FoGlob(b, lin)
  For col = 1 To 6
    Auxil(lin) = Auxil(lin) + MatGlobSR(b, lin, col) * Indep(ind(col))
  Next col
Next lin
For gl = 1 To 6
  For col = 1 To 6
    Esforço(b, gl) = Esforço(b, gl) + MatTransf(b, gl, col) * Auxil(col)
  Next col
Next gl
If Nit / 10 - Nit \ 10 = 0 Then

  form3.List1.AddItem (" barra : ") & (b) & (" ") & (" ") & (Flex(b, 1)) & (" ") & (Flex(b, 2)) & (" ") & (Esforço(b, 3)) & (" ") & (Esforço(b, 6))
  form3.List1.AddItem (" ")
End If
Next b
End Sub

```

'Rotina do método iterativo secante para um diagrama Momento x rotação elasto-plástico perfeito:

```

Sub MetIterSec()
For b = 1 To NBarras
  e = Propr(b, 1)
  i = Propr(b, 2)
  a = Propr(b, 3)

  'extremidade inicial da barra:
  If Abs(Esforço(b, 3)) > Mpl(b, 1) Then
    Flex(b, 1) = Flex(b, 1) * Abs(Esforço(b, 3)) / Mpl(b, 1)
  End If
  If Abs(Esforço(b, 3)) < Mpl(b, 1) And Flex(b, 1) > Flex(b, 1) Then
    Flex(b, 1) = Flex(b, 1) * Abs(Esforço(b, 3)) / Mpl(b, 1)
    If Flex(b, 1) < Flex(b, 1) Then
      Flex(b, 1) = Flex(b, 1)
    End If
  End If

  'extremidade final da barra:
  If Abs(Esforço(b, 6)) > Mpl(b, 2) Then
    Flex(b, 2) = Flex(b, 2) * Abs(Esforço(b, 6)) / Mpl(b, 2)
  End If
  If Abs(Esforço(b, 6)) < Mpl(b, 2) And Flex(b, 2) > Flex(b, 2) Then
    Flex(b, 2) = Flex(b, 2) * Abs(Esforço(b, 6)) / Mpl(b, 2)
    If Flex(b, 2) < Flex(b, 2) Then
      Flex(b, 2) = Flex(b, 2)
    End If
  End If
Next b
End Sub

```

```

Sub Erro()
For b = 1 To NBarras
  e = Propr(b, 1)
  i = Propr(b, 2)
  a = Propr(b, 3)
  'extremidade inicial da barra:

```

AMMáx = 0

If Abs(Esforço(b, 3)) > Mpl(b, 1) Then

AM = (Abs(Esforço(b, 3)) - Mpl(b, 1)) / Mpl(b, 1)

If AM > AMMáx Then AMMáx = AM

End If

If Abs(Esforço(b, 3)) < Mpl(b, 1) And Flex(b, 1) > Flex(b, 1) Then

AM = Abs(Esforço(b, 3)) - Mpl(b, 1) / Mpl(b, 1)

If Flex(b, 1) < Flex(b, 1) Then

tetaprov = Esforço(b, 3) * Flex(b, 1) * l(b) / (e * i)

Mprov = tetaprov * e * i / (Flex(b, 1) * l(b))

AM = (Abs(Esforço(b, 3)) - Mprov) / Mprov

End If

End If

'extremidade final da barra:

If Abs(Esforço(b, 6)) > Mpl(b, 2) Then

AM = (Abs(Esforço(b, 6)) - Mpl(b, 2)) / Mpl(b, 2)

If AM > AMMáx Then AMMáx = AM

End If

If Abs(Esforço(b, 6)) < Mpl(b, 2) And Flex(b, 2) > Flex(b, 2) Then

AM = Abs(Esforço(b, 6)) - Mpl(b, 2) / Mpl(b, 2)

If Flex(b, 2) < Flex(b, 2) Then

tetaprov = Esforço(b, 6) * Flex(b, 2) * l(b) / (e * i)

Mprov = tetaprov * e * i / (Flex(b, 2) * l(b))

AM = (Abs(Esforço(b, 6)) - Mprov) / Mprov

End If

End If

Next b

End Sub

Objetos armazenados no formulário 1.

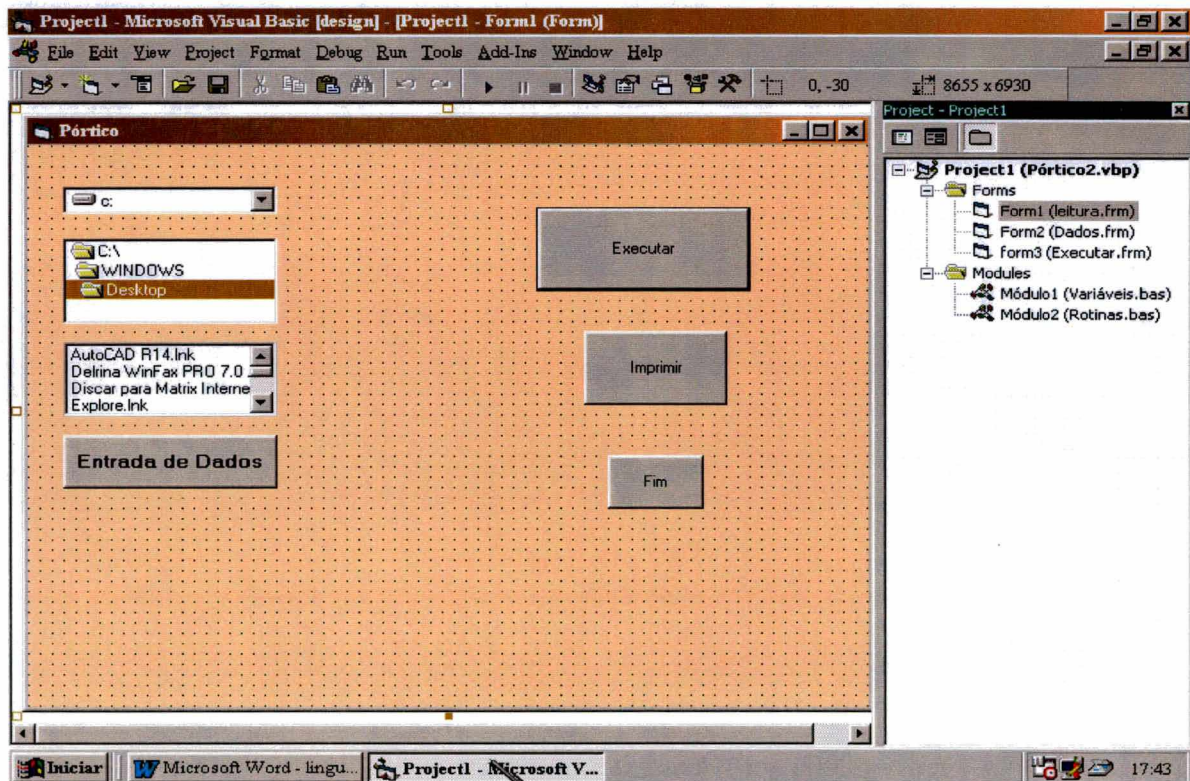


FIGURA – Impressão da tela mostrando os objetos no formulário 1.

Linguagem de programação armazenada no formulário 1, referente à leitura de dados, execução, escolha do arquivo e impressão dos resultados.

'Entrada de dados:

```
Private Sub Command1_Click()
Form2.Show
Open ArquivoSelecionado For Input As #1
Form2.List1.AddItem (" Análise Elasto-Plástica de Pórticos Planos com Conexões Semi-Rígidas : ")
Form2.List1.AddItem (" ")

Input #1, NNos
Form2.List1.AddItem (" Número de nós : ") & (NNos)
Form2.List1.AddItem (" ")

ngl = 3 * NNos
ReDim nos(NNos, 2)
For b = 1 To NNos
    Input #1, nos(b, 1) 'Abcissa x
    Input #1, nos(b, 2) 'Ordenada y
Form2.List1.AddItem ("Coordenadas do nó - (x,y) : ") & (b) & (" - ") & (nos(b, 1)) & (" , ") & (nos(b, 2))
Next b
Form2.List1.AddItem (" ")

Input #1, NBarras
Form2.List1.AddItem ("Número de barras : ") & (NBarras)

ReDim Propr(NBarras, 3)
For b = 1 To NBarras
    Input #1, Propr(b, 1) 'Módulo de Elasticidade
    Input #1, Propr(b, 2) 'Momento de Inércia
    Input #1, Propr(b, 3) 'Área da Secção Transversal
Form2.List1.AddItem ("Propriedades da barra - (E,I,A) : ") & (b) & (" - ") & (Propr(b, 1)) & (" , ") & (Propr(b, 2)) & (" , ") & (Propr(b, 3))
Next b
Form2.List1.AddItem (" ")

ReDim Incid(NBarras, 2)
For b = 1 To NBarras
    Input #1, Incid(b, 1) 'Nó inicial
    Input #1, Incid(b, 2) 'Nó final
Form2.List1.AddItem ("Incidência da barra - (x,y) : ") & (b) & (" - ") & (Incid(b, 1)) & (" , ") & (Incid(b, 2))
Next b
Form2.List1.AddItem (" ")

ReDim Carreg(NBarras, 2)
For b = 1 To NBarras
    Input #1, q 'Carga distribuída na barra
    Input #1, p 'Carga concentrada no meio da barra
    Carreg(b, 1) = q
    Carreg(b, 2) = p
Form2.List1.AddItem ("Carregamento na barra - (Distribuído , Concentrado) : ") & (b) & (" - ") & (Carreg(b, 1)) & (" , ") & (Carreg(b, 2))
Next b

Form2.List1.AddItem (" ")
```

```

Input #1, nf
Form2.List1.AddItem ("Número de nós com esforço : ") & (nf)
ReDim F(ngl)
For b = 1 To nf
    Input #1, nof 'Número do nó com esforço
    Input #1, Fx 'Esforço horizontal aplicado
    Input #1, Fy 'Esforço vertical aplicado
    Input #1, mi 'Momento aplicado
    c = (3 * nof) - 2
    d = (3 * nof) - 1
    t = (3 * nof)
    F(c) = Fx
    F(d) = Fy
    F(t) = mi
Form2.List1.AddItem ("Esforço no nó(nó,Fx,Fy,Mi) : ") & (nof) & (" , ") & (F(c)) & (" , ") & (F(d)) & (" , ") & (F(t))
Next b

Form2.List1.AddItem (" ")
Input #1, nr
Form2.List1.AddItem ("Número de nós com restrição : ") & (nr)
ReDim Restr(nr, 7)
For b = 1 To nr
    Input #1, nores 'Número do nó com restrição
    Input #1, codx 'Código de restrição em x
    Input #1, cody 'Código de restrição em y
    Input #1, codz 'Código de restrição em z
    Input #1, valx 'Valor da restrição em x
    Input #1, valy 'Valor da restrição em y
    Input #1, valz 'Valor da restrição em z
    Restr(b, 1) = nores
    Restr(b, 2) = codx
    Restr(b, 3) = cody
    Restr(b, 4) = codz
    Restr(b, 5) = valx
    Restr(b, 6) = valy
    Restr(b, 7) = valz
Form2.List1.AddItem ("Restrição (nó,codx,cody,codz,valx,valy,valz) : ") & (Restr(b, 1)) & (" , ") & (Restr(b, 2)) & (" , ") & (Restr(b, 3)) & (" , ") & (Restr(b, 4)) & (" , ") & (Restr(b, 5)) & (" , ") & (Restr(b, 6)) & (" , ") & (Restr(b, 7))
Next b

Form2.List1.AddItem (" ")
ReDim Flex(NBarras, 2)
For b = 1 To NBarras
    Input #1, Flex(b, 1)
    Input #1, Flex(b, 2)
    Form2.List1.AddItem ("Coeficiente de flexibilidade da barra no nó inicial : ") & (Flex(b, 1))
    If Flex(b, 1) = 0 Then Form2.List1.AddItem (" É uma conexão rígida ")
    If Flex(b, 1) >= 100000 Then Form2.List1.AddItem (" É uma conexão articulada ")
    Form2.List1.AddItem ("Coeficiente de flexibilidade da barra no nó final : ") & (Flex(b, 2))
    If Flex(b, 2) = 0 Then Form2.List1.AddItem (" É uma conexão rígida ")
    If Flex(b, 2) >= 100000 Then Form2.List1.AddItem (" É uma conexão articulada ")
Next b
Form2.List1.AddItem (" ")

ReDim Mpl(NBarras, 2)
For b = 1 To NBarras
    Input #1, Mpl(b, 1)
    Input #1, Mpl(b, 2)

```

```
Form2.List1.AddItem ("Momento de plastificação da extremidade inicial da conexão : ") & (Mpl(b, 1))
Form2.List1.AddItem ("Momento de plastificação da extremidade final da conexão : ") & (Mpl(b, 2))
Next b
```

```
Close #1
End Sub
```

```
Private Sub Command2_Click()
form3.Show
Open ArquivoSelecionado For Input As #2
```

'Primeira Resolução do Pórtico:

```
Nit = 0
Call Comprimento
itera:
If Nit < 200 Then
Call Flexibilidade
Call LeMatLocSR
Call LeMatGlobSR
Call LeMatEstrSR
Call TermoIndepSR
Call RestrGL
Call CalcResSist
Call CalcEsf
Call Erro

form3.List1.AddItem (" ")
If AMMáx <= 0.00001 Then ' Erro Estimado
form3.List1.AddItem (" Magnitudes dos momentos finais da estrutura : ") & (Nit + 1) & (" ") & ("
iterações ")
form3.List1.AddItem (" ")
For b = 1 To NBarras
form3.List1.AddItem (" Momento na extremidade inicial da barra : ") & (b) & (" , ") &
(Esforço(b, 3))
form3.List1.AddItem (" ")
form3.List1.AddItem (" Momento na extremidade final da barra : ") & (b) & (" , ") & (Esforço(b,
6))
form3.List1.AddItem (" ")
Next b
For i = 1 To NNos
a = 3 * i
b = i * 3 - 2
c = i * 3 - 1
form3.List1.AddItem (" Nó , Rotação Equivalente ( rad ) : ") & (i) & (" , ") & (Indep(a))
form3.List1.AddItem (" Nó , Deslocamento horizontal : ") & (i) & (" , ") & (Indep(b))
form3.List1.AddItem (" Nó , Deslocamento vertical : ") & (i) & (" , ") & (Indep(c))

Next i
Else
Nit = Nit + 1
form3.List1.AddItem (" Iterações : ")
For b = 1 To NBarras
form3.List1.AddItem (" ")
form3.List1.AddItem (" barra : ") & (b) & (" ") & (" ") & (" Iteração : ") & (" ") & (" Coeficiente
de Flexibilidade : ") & (" ") & (" momentos : ")
form3.List1.AddItem (Nit) & (" - ") & (" ") & (Flex(b, 1)) & (" ") & (Flex(b, 2)) & (" ") &
(Esforço(b, 3)) & (" ") & (Esforço(b, 6))
```



```

Next b
Call MetIterSec 'Novo Valor Corrigido do Coeficiente de Flexibilidade da Conexão
GoTo itera      'Resolve a Estrutura com o Novo Valor do Coeficiente de Flexibilidade Corrigido
End If
Else
form3.List1.AddItem (" NÃO CONVERGIU, TENTE NOVAMENTE!!!")
End If
Close #2
End Sub

```

```

Private Sub Command4_Click()
Call Impressão
End Sub

```

‘Escolha do arquivo texto.

```

Private Sub Dir1_Change()
File1.Path = Dir1.Path
End Sub

```

```

Private Sub Drive1_Change()
Dir1.Path = Drive1.Drive
End Sub

```

```

Private Sub File1_Click()
ArquivoSelecionado = File1.Path & "\" & File1.filename
End Sub

```

```

Private Sub Command3_Click()
End
End Sub

```

'Imprime todos os dados e resultados da resolução do programa para a impressora.

```

Sub Impressão()
Printer.Print " "
Printer.FontName = "Arial "
Printer.FontSize = 10
Printer.Print " Análise Elasto-Plástica de Pórticos Planos com Conexões Semi-Rígidas : "
Printer.Print " "
Printer.Print "Numero de nós   :"; NNos
Printer.Print "Numero de barras :"; NBarras
For b = 1 To NNos
Printer.Print " "
Printer.Print "COORDENADAS DO NÓ "; b
Printer.Print "Coordenada x :"; nos(b, 1)
Printer.Print "Coordenada y :"; nos(b, 2)
Next b
Printer.Print " "
For b = 1 To NBarras
Printer.Print " "
Printer.Print "PROPRIEDADES DA BARRA"; b
Printer.Print "Módulo de Elasticidade   :"; Propr(b, 1)
Printer.Print "Momento de Inércia       :"; Propr(b, 2)
Printer.Print "Área da secção transversal :"; Propr(b, 3)
Printer.Print " "
Printer.Print "INCIDÊNCIAS DA BARRA"; b
Printer.Print "Nó inicial: "; Incid(b, 1)
Printer.Print "Nó final : "; Incid(b, 2)
Printer.Print " "
Printer.Print "COMPRIMENTO/ÂNGULO DA BARRA"; b

```

```
Printer.Print "Comprimento:"; l(b)
Printer.Print "Ângulo   :"; Ang(b) * 57.29577951
Printer.Print " "
Printer.Print " COEFICIENTES DE FLEXIBILIDADE DA BARRA "; b
Printer.Print " Coeficiente de Flexibilidade da barra no nó inicial: "; Flex(b, 1)
Printer.Print " Coeficiente de Flexibilidade da barra no nó final: "; Flex(b, 2)
Printer.Print " "
Printer.Print " MOMENTOS DE PLASTIFICAÇÃO DA CONEXÃO DA BARRA "; b
Printer.Print " Momento de plastificação da conexão na extremidade inicial da barra : "; Mpl(b, 1)
Printer.Print " Momento de plastificação da conexão na extremidade final da barra : "; Mpl(b, 2)
Printer.Print " "
Next b
Printer.Print " "
```

Os formulários 2 e 3 são utilizados para impressão da entrada de dados e resultados do programa, respectivamente.